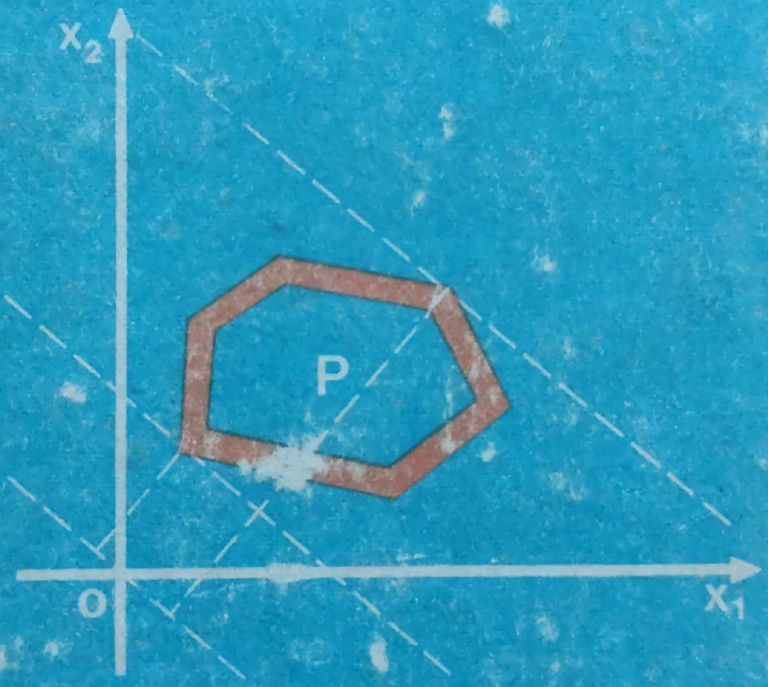
CERCHEZ MIHU

THEODOR DANEȚ

Probleme pentru aplicarea matematicii în practică



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ,
BUCUREȘTI

Scanned with OKEN Scanner

CERCHEZ MIHU
conferențiar universitar

TEODOR DANEȚ
profesor

Probleme pentru aplicarea matematicii în practică

Ediția a IV-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ,
BUCUREȘTI, 1982

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Ca și celelalte științe, matematica s-a născut din necesitățile practice ale omului, care s-au ivit pe diferite trepte de dezvoltare, în procesul muncii lui.

Contribuția matematicii la progresul științei și tehnicii este astăzi unanim recunoscută.

Exemplificarea acestui adevăr, la nivelul cunoștințelor teoretice primite în liceu, este o necesitate.

Scopul acestei lucrări este de a arăta modul în care unele noțiuni de matematici fundamentate teoretic se pot folosi la rezolvarea unor probleme practice.

În această nouă ediție o importanță deosebită a fost acordată *problemelor cu caracter economic.*

Printre acestea, un rol important îl are planificarea, urmărirea și analiza activității întreprinderilor, care au ca scop principal: *realizarea unui număr cît mai mare de bunuri materiale de tot felul, care să satisfacă nevoile mereu crescînde ale tuturor oamenilor muncii, cu minimum de efort și cu maximum de economii.*

Aceasta înseamnă că *productivitatea muncii* (care reprezintă cantitatea de produse realizate în unitate de timp) va trebui să crească necontenit, atît prin introducerea tehnicii noi în procesul de producție, cît și prin organizarea rațională a producției și creșterea calificării muncitorilor.

În același timp, ca o consecință a creșterii productivității muncii, precum și a altor măsuri care vor duce la economii de materiale și de manoperă, *prețul de cost* (costul exprimat în lei pe unitate de produs) va trebui să fie redus în mod continuu și progresiv, fără a diminua calitatea produselor și numărul sortimentelor.

Indicatorii[1] folosiți în planificare și în statistică se exprimă în unități fizice sau convenționale (m, m^2, m^3, kg, t, kWh, bucăți, lei/bucată, tone/om zi, kg combustibil convențional etc.).

Majoritatea indicatorilor folosiți de fiecare întreprindere economică se schimbă de la o perioadă de timp la alta și se realizează la sfîrșitul perioadei planificate conform planului, peste plan sau sub plan.

Ei pot fi considerați din punct de vedere matematic, variabile independente sau funcții de una sau mai multe variabile, și sînt legați între ei prin relații simple care comportă operații elementare (de adunare, scădere, înmulțire și împărțire).

Pentru a cunoaște mărimea unui indicator rezultat dintr-o serie de mărimi date, în statistică și în planificare se folosesc diferite mărimi medii:

[1] Mărimile folosite în planificare și statistică poartă denumirea generală de indicatori.

aritmetice, armonice, geometrice, pătratice, simple sau ponderate (studiate în capitolul I).

În capitolul II au fost rezolvate și propuse cîteva probleme de maxim și minim pe cale elementară, folosind unele teoreme deduse în capitolul I (la nivelul cunoștințelor din clasele 8—10).

Deoarece mărimea unui indicator poate crește sau descrește față de valoarea lui inițială, este necesar să cunoaștem modul de calcul al variației procentuale al unui indicator în cazul cînd expresia lui se prezintă sub forma unui produs, cît sau sume de doi sau mai mulți indicatori, care variază față de valorile lor inițiale cu anumite procente.

Astfel de probleme, întîlnite adesea în practică au fost studiate în capitolul III.

Pentru a putea urmări evoluția unui fenomen economic realizat în diferite perioade de timp, în capitolul IV au fost studiate și reprezentate graficele unor funcții cum ar fi: prețul de cost și productivitatea muncii în funcție de producție, variația numărului de cumpătători în funcție de timp, variația cheltuielilor de stocare în funcție de volumul stocului ș.a.

O gamă mult mai largă de probleme de maxim sau de minim au fost rezolvate cu ajutorul derivatelor (capitolul V).

În capitolul VI au fost date cîteva aplicații practice ale calculului integral (aria și volumul corpurilor de rotație, capacitatea butoaielor, lungimea unor arce de curbă, centrele de greutate ale unor plăci plane) iar în capitolul VII au fost rezolvate cîteva probleme practice de analiză combinatorie, construirea unor șabloane pentru croirea unor piese, unele aplicații în topografie, volumul unor corpuri geometrice mai puțin cunoscute dar foarte des întîlnite în practică: obeliscul, pana; probleme de interpolare și extrapolare (folosind polinomul de interpolare al lui Lagrange) ș.a.

Printre mijloacele care duc la executarea calculelor cu multă ușurință se află și nomogramele.

Construirea și modul de utilizare a unor nomograme simple este dat în capitolul VIII.

O atenție deosebită a fost acordată *programelor liniare* printre care *problema transporturilor* ocupă un loc central.

Dată fiind importanța mereu crescîndă a metodelor cercetării operaționale, în ultimul capitol s-au introdus cîteva metode elementare de *teoria grafurilor*.

Algoritmii expuși, care sînt simpli și ușor accesibili, permit soluționarea a numeroase probleme din cele mai diferite domenii de activitate, folosind: determinarea drumului de valoare sau de lungime optimă (maximă sau minimă), a fluxului maxim sau a drumului critic etc.).

Folosind metoda eliminării succesive (dată în anexă) am arătat cum se pot rezolva unele probleme de algebră liniară: discuția și rezolvarea sistemelor liniare, rangul unei matrice și matricea inversă a unei matrice pătrate nesingulare, valoarea unei funcții liniare, fără a folosi calcule greoaie cu *determinanți*, formulele lui *Cramer* sau teroma lui *Rouché* (care constituie de multă vreme piese de muzeu).

Credem că algebra liniară se poate dezvolta ușor, mai clar și mai profund, fără calcule cu determinanți. Este astăzi unanim recunoscut că determinantul nu se mai folosește decît în cazuri rare și atunci ca un concept abreviativ[1].

AUTORII

[1] A se vedea și articolul din revista belgiană „Nico" nr. 2/1969 și Gazeta matematică seria A nr. 2/1971 de acad. J. Dieudonné.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I.

MĂRIMI MEDII

§ 1. Calculul mărimilor medii

— *Media aritmetică simplă* (m_a)

Dacă notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o serie de mărimi individuale, în general diferite între ele, ce caracterizează evoluţia unui fenomen economic, tehnic, sau de altă natură, atunci media aritmetică m_a a acestor mărimi se obţine cu formula:

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad m_a = (\Sigma x_i) : n.$$

Mărimile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pot reprezenta:

— producţia realizată de un muncitor pe zi în cursul unei perioade de timp (de exemplu în cursul unei luni sau al unei decade), pentru a afla producţia medie zilnică ce revine unui muncitor (exprimată în unităţi de producţie pe zi, de exemplu bucăţi/zi);

— numărul de hectare arate zilnic la o fermă agricolă într-o perioadă de timp, pentru a determina numărul mediu de hectare arate pe zi;

— numărul de vagoane-marfă încărcate zilnic într-o staţie de cale ferată, pentru a afla media zilnică a încărcărilor în acea staţie etc.

Probleme propuse

1. Producţia realizată la extracţia minereului de fier, în decursul unui cincinal, este dată în tabelul:

Anul	I	II	III	IV	V
Mii tone	1 500	1 900	2 400	3 200	4 000

Se cere producţia medie anuală în acel cincinal. (R: 2 600 mii tone).

2. Tabelul de mai jos reprezintă numărul de tractoare care au funcţionat în 6 ani consecutivi:

Anul	I	II	III	IV	V	VI
Nr. bucăţi	40 000	48 000	57 000	68 000	82 000	100 000

Scanned with OKEN Scanner

Care este numărul mediu anual de tractoare care au existat în acea perioadă și numărul de tractoare care au fost construite în medie pe an (*R*: 71 000; 12 000).

— *Media aritmetică ponderată* (m_{ap})

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o serie de mărimi individuale, iar $m_1, m_2, \ldots m_n$ numere care ne arată de cîte ori se află mărimile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în seria de mărimi date. Media aritmetică ponderată m_{ap} se calculează cu formula:

$$m_{ap} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}; \qquad m_{ap} = \frac{\Sigma x_im_i}{\Sigma m_i}.$$

Numerele m_i: $\Sigma m_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$; cu care se înmulțesc mărimile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc *ponderi*[1].

Media aritmetică ponderată se folosește în cazul în care, în seria de mărimi date unele mărimi se întîlnesc de mai multe ori. De fapt, media aritmetică ponderată se obține dintr-o medie aritmetică simplă, în care unele mărimi din serie se întîlnesc de mai multe ori. Cum o adunare repetată se poate înlocui cu o înmulțire, media aritmetică obținută devine medie aritmetică ponderată.

Exemplu. Un grup de 40, 20, 60 de vagoane au fost încărcate cu 16, 10, respectiv 14 t/vagon. Se cere tonajul mediu care revine pe o osie a unui vagon.

Folosind formula care ne dă media ponderată, se obține:

$$m_{ap} = \frac{40 \cdot 16 + 20 \cdot 10 + 60 \cdot 14}{40 + 20 + 60} = 14 \text{ t/vagon (sau 7 t/osie)}.$$

Tonajul mediu care revine pe o osie este un indicator de o importanță deosebită în transportul pe calea ferată și poartă numele de *încărcătură statică pe osie*. Creșterea acestui indicator duce la depășirea tonajului fiecărui tren și deci la un volum mărit de transporturi cu același număr de trenuri.

Observație. Ponderarea se poate face nu numai cu mărimea absolută a ponderilor, ci și cu raportul procentual al fiecărei ponderi față de suma lor.

Aceasta este o consecință a faptului că formula care ne dă media aritmetică ponderată se mai poate scrie și sub forma:

$$m_{ap} = \frac{x_1\frac{m_1}{\Sigma m_i} \cdot 100 + x_2\frac{m_2}{\Sigma m_i} \cdot 100 + \ldots + x_n\frac{m_n}{\Sigma m_i} \cdot 100}{100},$$

iar dacă notăm $\frac{m_k}{\Sigma m_i} \cdot 100 = p_k$ formula de mai sus devine:

$$m_{ap} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n}{100} = \frac{\Sigma x_ip_i}{100}.$$

Numerele p_i: $100 \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se numesc ponderi procentuale.

[1] Dacă $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$, $m_{ap} = m_a$. Deci media aritmetică simplă m_a este un caz particular al mediei aritmetice ponderate m_{ap}.

Scanned with OKEN Scanner

De menționat că media aritmetică ponderată cu procentele mărimilor date se aplică mai ușor în practică, fiind mai simplă, deoarece procentele $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sînt, în general, numere de 2—3 cifre, iar numitorul formulei este egal cu 100 și deci împărțirea se face fără calcule.

Verificarea exactității calculelor unei medii aritmetice simple sau ponderate, se poate face cu ajutorul formulelor:

$$\Sigma(x_i - m_a) = 0; \qquad \Sigma m_i(x_i - m_{ap}) = 0.$$

Probleme propuse

1. La o întreprindere de confecții s-au executat în cursul unei luni: 200 de costume de 800 lei costumul, 150 paltoane cu 1000 lei bucata și 120 pardesiuri cu 650 lei bucata.

Care este prețul de cost mediu al unei confecții la acea întreprindere.

(*R:* 825,50 lei/bucată).

2. La o fermă agricolă recolta de grîu s-a realizat astfel: 32 q/ha, pe un lot de 12 ha; 36 q/ha pe un lot de 10 ha, 38 q/ha pe un lot de 16 ha și 40 q/ha pe un lot de 8 ha. Care este recolta medie de grîu la hectar, provenită din cele 4 loturi?

(*R:* 36,34 q/ha).

3. În țara noastră puterea electrică instalată a crescut astfel: între anii 1925—1930 cu 14 000 kW/an, între anii 1931—1938 cu 16 000 kW/an, iar între anii 1939—1945 cu 18 000 kW/an. Care este creșterea medie anuală a puterii de energie electrică instalată în perioada 1925—1945?

(*R:* 15 111 kW/an).

4. Puterea electrică instalată a crescut după cum urmează: între anii 1949—1954 cu 120 000 kW/an, între anii 1955—1960 cu 150 000 kW/an, iar între anii 1961—1965 a crescut cu 400 000 kW/an. Care este creșterea medie anuală a puterii instalate în perioada 1949—1965?

(*R:* 218 750 kW/an).

— *Media armonică simplă* (m_h)

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reprezintă o serie de mărimi date, media armonică m_h a acestor mărimi se calculează cu formula:

$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}; \quad m_h = \frac{n}{\Sigma \frac{1}{x_i}};$$

și este egală cu *inversa mediei aritmetice a inverselor mărimilor date.* În cazul particular $n = 2$, $n = 3$, media armonică se poate scrie sub forma:

$$m_h = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}; \quad m_h = \frac{3x_1x_2x_3}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}.$$

Exemplu. Prețul de cost al unui produs similar la trei fabrici diferite a fost 400, 500, respectiv 600 lei/bucată. Totalul cheltuielilor efectuate pentru realizarea acelei producții la fiecare din cele 3 fabrici a fost același.

Care este prețul de cost mediu al acelui produs la cele 3 fabrici?

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Dacă notăm cu C totalul cheltuielilor efectuate de fiecare din cele 3 fabrici și cu x_1, x_2, x_3 prețul de cost realizat la cele 3 fabrici, prețul de cost mediu c al acelui produs va fi:

$$c = \frac{\text{totalul cheltuielilor}}{\text{numărul produselor}} = \frac{C + C + C}{\frac{C}{x_1} + \frac{C}{x_2} + \frac{C}{x_3}} = \frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}}.$$

Se constată că prețul de cost mediu se obține calculînd media armonică a celor 3 prețuri obținute la cele 3 fabrici.

Înlocuind pe x_1, x_2, x_3 cu valorile date, găsim:

$$m_h = \frac{3}{\frac{1}{400} + \frac{1}{500} + \frac{1}{600}} = \frac{36\,000}{74} = 486{,}50;$$

deci prețul de cost mediu va fi de 486,50 lei/bucată[1].

— *Media armonică ponderată* (m_{hp})

Fie x_1, x_2, ..., x_n o serie de mărimi date, iar a_1, a_2, ..., a_n, n numere reale. Media armonică a mărimilor x_1, x_2, ..., x_n ponderate cu numerele a_1, a_2, ..., a_n este dată de formula:

$$m_{hp} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \ldots + \frac{a_n}{x_n}}; \quad m_{hp} = \frac{\Sigma a_i}{\Sigma \frac{a_i}{x_i}},$$

și este egală cu *inversa mediei aritmetice ponderate a inverselor mărimilor date.*

Numerele a_i: $\Sigma a_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se numesc ponderi.

Exemplu. Retribuția medie lunară a unei categorii de muncitori dintr-o întreprindere pe cele 4 trimestre ale unui an a fost 2 400, 2 580, 2 700, respectiv 2 840 lei/lună, iar fondul de retribuții efectiv pe cele 4 trimestre a fost de 600 000, 720 000, 900 000, respectiv 960 000 lei/trimestru. Care a fost retribuția medie lunară a unui muncitor de la acea întreprindere, în cursul acelui an?

Dacă notăm cu $\bar{r}$ retribuția medie lunară, atunci:

$$\bar{r} = \frac{\text{fondul de retribuții anual}}{\text{numărul de lucrători}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} + \frac{a_4}{x_4}},$$

în care a_i reprezintă fondul de retribuții trimestrial, iar x_i retribuția medie lunară a unui muncitor pe cele 4 trimestre.

Deci, retribuția medie lunară se calculează cu ajutorul mediei armonice a retribuțiilor lunare, ponderate cu fondul de retribuții corespunzătoare celor 4 trimestre.

---

[1] Prețul de cost al aceluiași produs diferă de la o întreprindere la alta, deoarece el depinde de modul de organizare a producției, de gradul de mecanizare a procesului de producție, de tipul de utilizare a mașinilor unelte, de randamentul acestor mașini, gradul de calificare al muncitorilor etc.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă înlocuim pe a_i și x_i cu valorile date, se obține:

$$\bar{c} = m_{hp} = \frac{600\,000 + 720\,000 + 900\,000 + 960\,000}{\frac{600\,000}{2\,400} + \frac{720\,000}{2\,580} + \frac{900\,000}{2\,700} + \frac{960\,000}{2\,840}} =$$

$$= \frac{3\,180\,000}{1\,217} = 2\,612 \text{ lei/lună.}$$

Observație. Ca și în cazul mediei aritmetice ponderate, ponderarea se poate face și cu raportul procentual al fiecărei ponderi față de suma lor.

În astfel de cazuri, ponderile $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vor fi exprimate în procente:

$$p_k = \frac{100a_k}{\Sigma a_i};$$

iar

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 100(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : \Sigma a_i = 100,$$

și deci:

$$m_{hp} = \frac{100}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \ldots + \frac{p_n}{x_n}} = \frac{100}{\Sigma \frac{p_i}{x_i}}.$$

Exemplu. La o fermă agricolă, producția de grîu la hectar a fost realizată astfel:

— pe 60% din suprafața cultivată, producția a fost depășită cu 20% față de plan;

— pe 30,5%, producția a fost depășită cu 25% față de plan;

— pe 9,5%, producția a fost realizată cu 5% sub plan.

Care este procentul mediu cu care a fost depășită producția de grîu la hectar la acea fermă agricolă?

Soluție. Cunoscînd procentele de variație a planului, p_i, coeficienții de realizare c_i se vor calcula cu formula:

$$c_i = 1 + \frac{p_i}{100}.$$

În exemplul dat se va găsi:

$$c_1 = 1 + 0{,}20 = 1{,}20; \quad c_2 = 1 + 0{,}25 = 1{,}25; \quad c_3 = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$$

(deoarece 5% sub plan înseamnă $p_3 = -5$).

Cunoscînd coeficienții parțiali c_1, c_2, c_3 de realizare a planului, coeficientul mediu de realizare a planului global se va obține cu ajutorul mediei armonice a coeficienților parțiali de realizare, ponderați cu procentele corespunzătoare celor trei suprafețe față de suprafața totală:

$$\bar{c} = \frac{100}{\frac{60}{1{,}2} + \frac{30{,}5}{1{,}25} + \frac{9{,}5}{0{,}95}} = \frac{100}{84{,}4} = 1{,}1825;$$

Scanned with OKEN Scanner

iar procentul mediu de depășire va fi:

$$\bar{p} = 100(\bar{c} - 1) = 100(1{,}1825 - 1) = 18{,}25\%.$$

Deci la acea fermă agricolă planul producției la grîu a fost depășit cu 18,25%.

Probleme propuse

1. În cursul unui an, retribuțiile unui grup de tehnicieni, ingineri și economiști ai unei întreprinderi au fost majorate astfel: 20% din totalul retribuțiilor au fost majorate cu 25%, 42% cu 20% și 38% cu 15%.

Se cere coeficientul și procentul mediu de majorare a retribuțiilor acelui grup.

Indicație: Se vor calcula mai întîi coeficienții medii parțiali de majorare a retribuțiilor și se va găsi: $x_1 = 1{,}25$; $x_2 = 1{,}20$; $x_3 = 1{,}15$; apoi, folosind media armonică ponderată, se va găsi: $\bar{x} = 1{,}19$ sau $\bar{p} = 19\%$.

2. Producția globală realizată la 3 întreprinderi a fost de: 1 200, 2 800, respectiv 3 900 mii lei în cursul unei luni, iar coeficienții de îndeplinire a planului au fost: 1,2; 1,4; respectiv 1,3.

Care este coeficientul și procentul mediu de îndeplinire a planului global la acest grup de întreprinderi?

Indicație: Cum $\bar{c}_i = P_r : P_p$, rezultă $P_p = P_r : \bar{c}_i$; $i = 1, 2, 3$; iar coeficientul mediu $\bar{c}$ se va obține din formula:

$$\bar{c} = \frac{\text{producția realizată}}{\text{producția planificată}} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{P_1 : \bar{c}_1 + P_2 : \bar{c}_2 + P_3 : \bar{c}_3}$$

se va găsi $\bar{c} = 1{,}316$; deci $\bar{p} = 31{,}6\%$.

— *Media geometrică simplă* (m_g).

Fie $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ o serie de mărimi date[1]. Fiecare din ele vor prezenta în general, o majorare sau o reducere față de mărimea precedentă (în anumite cazuri particulare, unele mărimi pot fi și egale între ele).

Dacă notăm cu x_i raportul dintre mărimea a_i față de mărimea precedentă a_{i-1}, (sau coeficientul de variație) se pot scrie relațiile:

$$x_1 = \frac{a_1}{a_0}; \quad x_2 = \frac{a_2}{a_1}; \quad x_3 = \frac{a_3}{a_2}, \ \ldots, \ x_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Înmulțind aceste relații se obține:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{a_n}{a_0}. \qquad (1)$$

---

[1] **Exemple: Producția realizată la o întreprindere pe o perioadă dată de timp, prețul de cost al unui produs; în general, mărimea unui indicator economic realizat (sau planificat) în diferite perioade de timp etc. Prin natura lor mărimile a_i sînt strict pozitive: $a_i > 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.**

Scanned with OKEN Scanner

Dacă vom presupune că variația acestor mărimi este uniformă și egală cu $\bar{x}$, relația (1) devine:

$$\bar{x}^n = \frac{a_n}{a_0}\ ; \quad \bar{x} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}, \tag{2}$$

sau, dacă ținem seama de (1):

$$\bar{x} = m_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}. \tag{3}$$

Se constată că modul de variație a mărimilor $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (sau coeficientul mediu de variație $\bar{x}$) este egal cu media geometrică a coeficienților de variație a fiecărei mărimi față de mărimea precedentă. Procentul mediu de variație a mărimilor $a_0, a_1, \ldots, a_n$ este $\bar{p} = 100\ (\bar{x} - 1)$.

În practică se va folosi formula (2) sau (3), după cum se cunoaște seria de mărimi absolute $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sau numai coeficienții de variație ai acestor mărimi $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Pentru calculul efectiv al mediei geometrice se aplică logaritmii în (2) sau (3)

$$\lg \bar{x} = (\lg a_n - \lg a_0) : n = b\ ;\ \bar{x} = \text{anti lg } b, \tag{2'}$$

$$\lg \bar{x} = (\lg x_1 + \ldots + \lg x_n) : n = b\ ;\ \bar{x} = \text{anti lg } b. \tag{3'}$$

Exemple: 1. Producția de tractoare pe o perioadă de 5 ani este dată în tabela de mai jos:

Anul	I	II	III	IV	V
Numărul de bucăți	4 000	6 000	7 500	9 000	11 700
Coeficientul de variație	1	1,5	1,25	1,20	1,30

Care este procentul mediu de creștere a numărului de tractoare în acest interval de timp?

Soluție. Deoarece seria mărimilor este cunoscută, ritmul mediu de variație va fi dat de formula:

$$\bar{x} = \sqrt[4]{\frac{11\,700}{4\,000}}$$

$$\lg \bar{x} = (\lg 11\,700 - \lg 4\,000) : 4 = 0{,}1145\ ;$$

$\bar{x} = \text{anti lg } 0{,}1145 = 1{,}307$; iar $\bar{p} = 100(\bar{x} - 1) = 100(1{,}307 - 1) = 30{,}7\%$.

Producția de tractoare a crescut în medie cu 30,7% în fiecare an față de anul precedent.

2. Puterea instalată în centralele electrice crește anual în medie cu 16%. Se cere puterea instalată la sfîrșitul unei perioade de 5 ani, știind că la început ea a fost de $16 \cdot 10^6$ kW.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Coeficientul mediu de creștere anuală va fi:

$$\bar{c} = 1 + \frac{\bar{p}}{100} = 1 + \frac{16}{100} = 1 + 0{,}16 = 1{,}16,$$

iar puterea instalată la sfîrșitul perioadei se va obține din formula (2):

$$a_6 = a_0\,\bar{c}^6 = 1{,}16^6 \cdot 16 \cdot 10^6;$$

$$\lg a_6 = 6 \lg 1{,}16 + \lg 16 + 6 = 7{,}59288.$$

$$a_6 = 39 \cdot 16 \cdot 10^6 \text{ kW}$$

și prezintă o creștere de

$$\bar{p} = 100\left(\frac{39{,}16}{16} - 1\right) = 144\%.$$

3. Prețul de cost al unui produs a scăzut de la 1 500 la 1 000 lei, ca urmare a 4 reduceri consecutive.

Care a fost ritmul mediu de reducere a prețului de cost la acel produs?

Soluție. Folosind formula (2), se obține coeficientul mediu de reducere $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \sqrt[4]{1000 : 1500} = \sqrt[4]{2 : 3}.$$

Se va găsi $\bar{x} = 0{,}9036$; iar procentul mediu de variație va fi $\bar{p} = 100(\bar{x} - 1) = -9{,}64\%$. Cum $\bar{p} < 0$, prețul de cost a fost redus în medie cu 9,64% la fiecare din cele 4 reduceri consecutive.

4. Costul unui produs în valoare de 1 000 lei a suferit 5 reduceri consecutive, de 5%, 8%, 10%, 15%, 20%.

Care este procentul mediu de reducere a prețului de cost al acelui produs și costul lui final?

Soluție. Se determină coeficienții medii de reducere cu formula:

$$x_1 = 1 + p_1 : 100; \quad x_1 = 1 - \ldots : 100 = 0{,}95; \quad x_2 = 0{,}92; \quad x_3 = 0{,}90;$$

$$x_4 = \ldots; \quad x = 0{,}80.$$

Formula (3) ne va da apoi coeficientul mediu de variație

$$\bar{x} = \sqrt[5]{0{,}95 \cdot \ldots \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}80};$$

$$\bar{x} = 0{,}8823; \quad \bar{p} = 100(\bar{x} - 1) = 88{,}23 - 100 = -11{,}77\%.$$

Cum $\bar{p} < 0$, rezultă că prețul de cost s-a redus în medie cu 11,77% a fiecare din cele 5 reduceri consecutive.

Calculul costului final

Cum seria de mărimi date $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se poate scrie și sub forma:

$$a_0,\ a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right),\ a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2,\ \ldots,\ a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

prețul de cost final după n reduceri consecutive va fi:

$$a_n = a_0\left(1 + \frac{1}{100}\right)^n.$$

În exemplul dat, avem:

$$a_5 = a_0\left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right)^5 = 1000\left(1 - \frac{11{,}77}{100}\right)^5 = 535.$$

După cele 5 reduceri consecutive costul final va fi de 535 lei.

— *Media geometrică ponderată* (m_{gp}):

Dacă $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sînt n numere reale strict pozitive, media geometrică ponderată m_{gp} este dată de formula:

$$m_{gp} = \sqrt[r]{x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n}};\ r = r_1 + r_2 + \ldots + r_n.$$

Dacă $r_1 = r_2 = \ldots r_n = 1$; $r = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$ și se obține media geometrică simplă a n numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$m_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

— *Media pătratică*:

Dacă $x_1, x_2 \ldots x_n$, reprezintă elementele unei colectivități statistice[1] formată din n elemente și $\tilde{x}$ media lor aritmetică, atunci diferențele:

$$x_1 - \tilde{x};\ x_2 - \tilde{x};\ \ldots\ x_n - \tilde{x};$$

dintre fiecare element x_i și media lor aritmetică $\tilde{x}$ se numesc abateri de la media lor aritmetică.

Pentru a calcula media acestor abateri se folosește media aritmetică a pătratelor abaterilor[2] de la media aritmetică și se calculează cu formula:

$$D(\tilde{x}) = \frac{(x_1 - \tilde{x})^2 + (x_2 - \tilde{x})^2 + \ldots + (x_n - \tilde{x})^2}{n} = \frac{\Sigma(x_i - \tilde{x})^2}{n}.$$

Media aritmetică a pătratelor abaterilor se notează cu litera D și poartă numele de DISPERSIE.

Abaterea medie pătratică se notează de obicei cu litera σ, și este egală cu rădăcina pătrată a dispersiei:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \tilde{x})^2 + (x_2 - \tilde{x})^2 + \ldots + (x_n - \tilde{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \tilde{x})^2}{n}}.$$

Abaterea medie pătratică este o mărime statistică care se exprimă în aceleași unități ca și elementele x_i ale colectivității statistice.

Observații. Dacă abaterile $|x_i - \tilde{x}|$ sînt mici, aceasta înseamnă că seria de mărimi x_i diferă puțin de media lor aritmetică. În astfel de cazuri

---

[1] O mulțime de obiecte, ființe, lucruri, fenomene, formează o colectivitate statistică dacă ele posedă unele caracteristici comune.

[2] deoarece media aritmetică a abaterilor este nulă.

Scanned with OKEN Scanner

și pătratele acestor abateri $(x_i - \bar{x})^2$ vor fi mici, deci și media aritmetică a pătratelor abaterilor adică dispersia D, precum și abaterea medie pătratică adică σ vor fi de asemenea mici.

Dacă abaterile vor fi mari, atunci și abaterea medie pătratică σ va fi mare.

De aceea, *abaterea medie pătratică* reprezintă un indicator important al unei colectivități statistice; ea ne indică *oscilația* sau *diversitatea distribuției* elementelor x_i din colectivitatea statistică pe care o studiem.

Aplicație. Se cunosc prețurile de cost ale unui produs similar la 5 fabrici diferite: A_1, A_2, ..., A_5. Se cere să se calculeze dispersia $D(x_i)$, precum și abaterea medie pătratică σ, folosind datele din tabela de mai jos.

Vom calcula succesiv:

Denumirea întreprinderii	Prețul de cost (x_i) lei/buc.	Abaterea de la media aritmetică $x_i - \bar{x}$	Pătratul abaterilor $(x_i - \bar{x})^2$
A_1	40	−28	784
A_2	60	− 8	64
A_3	75	7	49
A_4	85	17	289
A_5	80	12	144
Total	340	0	1330

— media aritmetică a mărimilor x_i:

$$\bar{x} = \Sigma x_i : 5 = 340 : 5 = 68;$$

— abaterile de la media aritmetică, adică diferențele $x_i - \bar{x}$;

$40 - 68 = -28$; $60 - 68 = -8$; $75 - 68 = 7$; $85 - 68 = 17$; $80 - 68 = 12$;

trecute în coloana 3;

— pătratele abaterilor $(x_i - \bar{x})^2$, trecute în coloana 4;

— media aritmetică a pătratelor, adică dispersia:

$$D(\bar{x}) = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{5} = \frac{1330}{5} = 266;$$

— abaterea medie pătratică:

$$\sigma = \sqrt{D(\bar{x})} = \sqrt{266} \approx 16{,}31.$$

Rezultă că abaterea medie de la prețul de cost este de 16,31 lei.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie. Deoarece dispersia se poate scrie şi sub forma:

$$D(\tilde{x}) = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \frac{2\bar{x}\,\Sigma x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} =$$

$$= \bar{x}_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \bar{x}_i^2 - \bar{x}^2,$$

în practică se va folosi formula mai simplă:

$$D(\tilde{x}) = \bar{x}_i^2 - \bar{x}^2. \qquad (4)$$

Dispersia este egală cu diferenţa dintre *media aritmetică* a pătratelor elementelor x_i şi *pătratul mediei aritmetice* a acelor elemente.

Pentru sistematizarea calculelor se poate folosi tabela de mai jos:

Nr. crt. (1)	x_i (2)	x_i^2 (3)	$\bar{x}$ (4)	$\bar{x}^2$ (5)	$\bar{x}_i^2$ (6)	$\bar{x}_i^2 - \bar{x}^2$ (7)
1	40	1 600				
2	60	3 600				
3	75	5 625				
4	85	7 225				
5	80	6 400				
Total	340	24 450	68	4 624	4 890	266

— în coloana 2 se trec elementele $x_1, x_2, \ldots, x_5$;
— în coloana 3 se trec pătratele lor x_i^2;
— calculăm media aritmetică ($\bar{x}$) a elementelor x_i şi pătratul ei:

$$\bar{x} = \Sigma x_i : 5 = 340 : 5 = 68;\ \bar{x}^2 = 68^2 = 4624;$$

— calculăm media aritmetică a pătratelor elementelor x_i, folosind datele din coloana 3:

$$\bar{x}_i^2 = \frac{40^2 + 60^2 + 75^2 + 85^2 + 80^2}{5} = \frac{24\,450}{5} = 4890,$$

şi se trece în coloana (6):
— calculăm apoi dispersia, folosind formula (4):

$$D(x_i) = \bar{x}_i^2 - \bar{x}^2 = 4890 - 4624 = 266,$$

care se trece în coloana (7).

Practic, coloanele (4), (5), (6), (7) pot fi suprimate reţinînd numai rezultatele din ultima linie.

$$\bar{x} = 68;\ \bar{x}^2 = 4624;\ \bar{x}_i^2 = 4890;\ D = \bar{x}_i^2 - \bar{x}^2 = 266.$$

Scanned with OKEN Scanner

— *Media pătratică simplă* (m_p).

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt n numere variabile, media pătratică simplă (m_p) se calculează cu formula:

$$m_p = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n}}.$$

— *Media pătratică ponderată* (m_{pp}).

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt n numere reale date, strict pozitive, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n numere variabile, media pătratică ponderată (m_{pp}) se calculează cu formula[1]:

$$m_{pp} = \sqrt{\frac{a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}} = \sqrt{\frac{\Sigma a_i x_i^2}{\Sigma a_i}};$$

numerele $a_i : \Sigma a_i > 0$, se numesc ponderi.

Dacă notăm:

$$a_i : \sum_1^n a_i = p_i; \quad \sum_1^n p_i = 1;$$

media pătratică ponderată se va scrie:

$$m_{pp} = \sqrt{p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2} = \sqrt{\Sigma p_i x_i^2}.$$

Media pătratică simplă (m_p) și media pătratică ponderată (m_{pp}) se numesc medii de ordin doi.

— *Media cubică simplă.*

$$m_c = \sqrt[3]{\frac{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3}{n}} = \sqrt[3]{\frac{\Sigma x_i^3}{n}}.$$

— *Media cubică ponderată.*

$$m_{cp} = \sqrt[3]{\frac{a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + \ldots + a_nx_n^3}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}} = \sqrt[3]{\frac{\Sigma a_i x_i^3}{\Sigma a_i}}.$$

Dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, se obține media cubică simplă, care este deci un caz particular al mediei cubice ponderate.

Media cubică simplă și ponderată se mai numesc și medii de ordinul 3.

— *Media simplă de ordinul r* ($r \in \mathbf{N}$).

$$m_r = \sqrt[r]{\frac{x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r}{n}} = \sqrt[r]{\frac{\Sigma x_i^r}{n}}. \qquad (5)$$

[1] dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, se obține media pătratică simplă.

— *Media ponderată de ordinul r.*

$$m_{pr} = \sqrt[r]{\frac{a_1x_1^r + a_2x_2^r + \ldots + a_nx_n^r}{n}} = \sqrt[r]{\frac{\Sigma a_ix_i^r}{n}}. \qquad (6)$$

Dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, se obține media simplă de ordinul r, care este deci un caz particular al mediei ponderate de ordinul r ($r \in \mathbb{N}$).

Observații. Dacă în (5) facem $r = 1, 2, 3, \ldots, k$, se obțin mediile simple: aritmetice (m_a), pătratice (m_p), cubice (m_c), ..., de ordinul k (m_k).

Dacă în (6) facem $r = 1, 2, 3, \ldots, k$, se obțin mediile ponderate: aritmetice (m_{ap}), pătratice (m_{pp}), cubice (m_{cp}), ..., de ordinul k (m_{pk}).

La care se mai adaugă mărimile medii studiate mai înainte:
— media geometrică simplă (m_g), media geometrică ponderată (m_{gp});
— media armonică simplă (m_h), media armonică ponderată (m_{hp}).

Probleme propuse

1. În cinci ani consecutivi, producția în transportul de mărfuri pe calea ferată exprimată în tone·km[1] a prezentat următorii coeficienți de variație de la un an la altul:

Anul	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
Coeficientul de variație	1	1,18	1,11	1,21	1,001	1,12

Care a fost ritmul mediu anual de variație a producției în transportul feroviar în acea perioadă de 5 ani?

R: Se va folosi formula (3); se va găsi $\bar{c} = 1{,}122$ sau $\bar{p} = 12{,}20\%$.

2. Care va fi ritmul mediu anual de reducere a prețului de cost la o categorie de produse, dacă se prevede ca în decurs de 5 ani să scadă cu 30%?

R: 6,88% în fiecare an față de anul precedent.

3. În decurs de 5 ani producția de hîrtie a crescut de la $125 \cdot 10^3$ t la $375 \cdot 10^3$ t (adică de 3 ori). Care este ritmul mediu de creștere anuală a producției de hîrtie în această perioadă?

R: Se va folosi formula $a_n = a_0\left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right)$, în care $a_n = 3\ a_0$; $n = 5$; $\bar{p} = 100(\sqrt[5]{3} - 1) = 24{,}57\%$.

---

[1] Producția în transportul de mărfuri pe calea ferată evaluată în tone·km rezultă din cantitățile de mărfuri exprimate în tone, înmulțite cu distanța parcursă în km; 200 t transportate pe o distanță de 300 km ne va da 200 · 300 = 60 000 tone·km. Calculul acestui indicator se face cu formula:

$$\sum_1^n t_i \cdot d_i = t_1 \cdot d_1 + t_2 \cdot t_2 + \ldots + t_n \cdot d_n.$$

Scanned with OKEN Scanner

4. Se cere coeficientul și procentul mediu de creștere lunară a producției la o întreprindere de textile, cunoscînd următoarele date:

Luna	Producția globală (lei)	Coeficientul de creștere față de luna precedentă
Ianuarie	300 000	—
Februarie	330 000	1,10
Martie	396 000	1,20
Aprilie	495 000	1,25
Mai	643 500	1,30
Iunie	842 985	1,30

R: Se poate aplica și formula (2) și (3); în ambele cazuri se va găsi: $\bar{c} = 1{,}23$ sau $\bar{p}$: 23%.

5. Care este ritmul mediu de variație a producției la o întreprindere industrială pentru care s-a prevăzut ca după n ani producția inițială Q_0 să devină egală cu Q_n?

Indicație: Dacă se presupune ritmul mediu de variație uniform și egal cu p% din producția anului precedent, atunci:

$$Q_n = Q_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \; ; \quad \text{iar} \quad p = 100\,(\sqrt[n]{Q_n : Q_0} - 1).$$

Producția a crescut, s-a redus, sau a rămas neschimbată față de producția inițială, după cum $p > 0$, $p < 0$, sau $p = 0$.

6. O întreprindere industrială trebuie să realizeze într-o perioadă de 6 ani, 100 000 piese.

Se știe că la sfîrșitul primului an existau 44 000, iar în cursul celui de al doilea an au mai fost confecționate 8 000. Se cere ritmul mediu de creștere al numărului de piese de la un an la altul în perioada ultimilor 5 ani.

Indicație: Dacă se notează cu x coeficientul mediu de creștere de la un an la altul, se obține ecuația:

$$44\,000 + 8\,000 + 8\,000\,x + 8\,000x^2 + 8\,000\,x^3 + \\ + 8\,000\,x^4 = 100\,000,$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 7,$$

care se poate scrie:

$$(x^5 - 1) : (x - 1) = 7\,; \quad x^5 - 7x + 6 = 0. \qquad (7)$$

Scanned with OKEN Scanner

Scrisă sub această formă, ecuația (7) admite rădăcina străină $x = 1$. Celelalte rădăcini le vom obține folosind șirul lui Rolle:

$$P(x) = x^5 - 7x + 6 = 0; \qquad P'(x) = 5x^4 - 7 = 0;$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{7:5} \approx \pm 1{,}1.$$

x	$-\infty$	$-1{,}1$	$1{,}1$	$1{,}2$	$+\infty$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

Rădăcina care ne interesează $x_1 \in (1{,}1;\ 1{,}2)$.

Aplicînd de două ori metoda coardei pentru aproximarea rădăcinii, găsim:

$$x = 1{,}17; \quad p = 100(1{,}17 - 1) = 17\%.$$

Numărul de piese va trebui să crească în medie cu 17% în fiecare an față de anul precedent.

§ 2. Criteriu pentru aplicarea în practică a mărimilor medii

Deoarece mărimile medii se aplică în multe domenii de activitate (planificarea și analiza activității întreprinderilor industriale, agricole, de construcții sau de transport, în biologie, medicină etc.) problema care se pune este de a ști cînd se aplică aceste mărimi.

În care probleme se aplică media aritmetică, în care media armonică, geometrică sau pătratică?

Răspunsul la această întrebare rezultă din teoria Chissini-Boiarschi[1] care se sprijină pe următoarele definiții:

— O colectivitate statistică poate avea diferite proprietăți.

— O parte din aceste proprietăți pot fi exprimate numeric.

— Numim *proprietate determinantă* a unei colectivități statistice acea proprietate care rămîne neschimbată cînd variabila x ia toate valorile posibile $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

— Proprietatea determinantă se exprimă întotdeauna printr-o funcție de aceste variabile:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

— Se numește *valoare medie* a variabilei x, după proprietatea determinantă, acea valoare $\bar{x}$, care prin substituția:

$$x_i = \bar{x}; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

nu modifică proprietatea determinantă.

Ca o consecință a definițiilor date, rezultă că valoarea medie $\bar{x}$ se va obține rezolvînd ecuația:

$$F(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{8}$$

Pentru a vedea cum se aplică practic această teorie, vom da cîteva exemple.

---

[1] Elaborată independent unul de altul în anul 1929.

Scanned with OKEN Scanner

1. Se topesc împreună n aliaje de aur $A_1, A_2, \ldots, A_n$ care au titlurile:

$$t_1, t_2, \ldots, t_n,$$

și masele:

$$m_1, m_2, \ldots, m_n.$$

Se cere titlul noului aliaj.

Soluție. Amintim că titlul unui aliaj reprezintă cantitatea de aur pur conținut într-un gram de aliaj. Astfel, cantitatea de aur G_i conținută în aliajul A_i, va fi dat de formula:

$$G_i = m_i \cdot t_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se constată că proprietatea determinantă a tuturor aliajelor este cantitatea de aur pur conținută în întregul aliaj.

Dar întreaga cantitate de aur din cele n aliaje este în funcție de titlurile t_i ale acestor aliaje.

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n) = m_1t_1 + m_2t_2 + \ldots + m_nt_n. \tag{9}$$

Dacă notăm cu $\bar{t}$, valoarea medie a titlului noului aliaj rezultat după topirea celor n aliaje, vom putea scrie:

$$F(\bar{t}, \bar{t}, \ldots, \bar{t}) = m_1\bar{t} + m_2\bar{t} + \ldots + m_n\bar{t}. \tag{10}$$

Cum în baza relației (8) funcțiile (9) și (10) sînt egale, obținem:

$$m_1\bar{t} + m_2\bar{t} + \ldots + m_n\bar{t} = m_1t_1 + m_2t_2 + \ldots + m_nt_n,$$

sau

$$\bar{t} = \frac{m_1t_1 + m_2t_2 + \ldots + m_nt_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma m_it_i}{m},$$

unde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

În acest exemplu s-a folosit *media aritmetică ponderată.*

2. Prețul de cost al unui produs similar la n fabrici a fost $c_1, c_2, \ldots, c_n$ lei/unitate de produs.

Totalul cheltuielilor efective pentru realizarea producției la fiecare din cele n fabrici a fost același, C lei.

Se cere prețul de cost mediu al acelui produs la cele n fabrici.

Soluție. Proprietatea determinantă este cantitatea totală a producției realizată la cele n fabrici.

Dacă notăm cu:

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n,$$

producția realizată la cele n fabrici, vom putea scrie:

$$Q_1 = \frac{C}{c_1}; \quad Q_2 = \frac{C}{c_2}; \quad \ldots; \quad Q_n = \frac{C}{c_n}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci funcția determinantă, care trebuie să reprezinte întreaga producție la cele n fabrici, va fi:

$$F(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \frac{C}{c_1} + \frac{C}{c_2} + \ldots + \frac{C}{c_n}. \tag{11}$$

Dacă notăm cu $\bar{c}$ prețul de cost mediu realizat la cele n fabrici, relația (11) devine:

$$F(\bar{c}, \bar{c}, \ldots, \bar{c}) = \frac{C}{\bar{c}} + \frac{C}{\bar{c}} + \ldots + \frac{C}{\bar{c}}. \tag{12}$$

Cum funcțiile (11) și (12) sînt egale:

$$\frac{C}{\bar{c}} + \frac{C}{\bar{c}} + \ldots + \frac{C}{\bar{c}} = \frac{C}{c_1} + \frac{C}{c_2} + \ldots + \frac{C}{c_n},$$

de unde rezultă:

$$\bar{c} = \frac{n}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_n}} = \frac{n}{\Sigma \frac{1}{c_i}}.$$

Se constată că în acest exemplu, am folosit *media armonică simplă.*

3. În n perioade de timp consecutive (de exemplu în cele 12 luni ale unui an) prețul de cost al unui produs la o întreprindere industrială a fost:

$$c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ (lei/unitate de produs).}$$

Știind că totalul cheltuielilor efective realizate pe cele n perioade de timp a fost:

$$S_1, S_2, \ldots, S_n \text{ (lei),}$$

se cere prețul de cost mediu al acelui produs pe întreaga perioadă de timp luată în considerare.

Soluție. Proprietatea determinantă este întreaga cantitate de produse realizată în cele n perioade de timp și depinde de prețul de cost al produsului în fiecare din cele n perioade.

Dacă notăm cu

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$$

cantitățile produse în cele n perioade de timp, vom putea scrie:

$$Q_1 = \frac{S_1}{c_1}; \quad Q_2 = \frac{S_2}{c_2}; \quad \ldots; \quad Q_n = \frac{S_n}{c_n},$$

iar funcția determinantă, care trebuie să exprime întreaga producție realizată, va fi:

$$F(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \frac{S_1}{c_1} + \frac{S_2}{c_2} + \ldots + \frac{S_n}{c_n}. \tag{13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm cu $\bar{c}$ prețul de cost mediu realizat pe întreaga perioadă de timp, relația (13) devine:

$$F(\bar{c},\ \bar{c},\ \ldots,\ \bar{c}) = \frac{S_1}{\bar{c}} + \frac{S_2}{\bar{c}} + \ldots + \frac{S_n}{\bar{c}}. \tag{14}$$

Cum (13) și (14) sînt egale, obținem:

$$\frac{S_1}{\bar{c}} + \frac{S_2}{\bar{c}} + \ldots + \frac{S_n}{\bar{c}} = \frac{S_1}{c_1} + \frac{S_2}{c_2} + \ldots + \frac{S_n}{c_n},$$

de unde se deduce:

$$\bar{c} = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{\frac{S_1}{c_1} + \frac{S_2}{c_2} + \ldots + \frac{S_n}{c_n}} = \frac{\Sigma S_i}{\Sigma \frac{S_i}{c_i}}.$$

Soluția a fost obținută folosind media *armonică ponderată*.

4. Prețul de cost al unui produs oarecare în valoare de C_0 lei a suferit n variații (reduceri sau majorări) cu procentele $p_1, p_2, \ldots, p_n$, în n perioade de timp consecutive.

Se cere:

— Procentul mediu de variație a prețului de cost la acel produs ($\bar{p}$).

— Costul final (C_n) al produsului, după cele n variații succesive.

Soluție. Funcția determinantă va depinde de procentele parțiale p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) de variație a prețului de cost.

După n reduceri consecutive cu procentele $p_1, p_2, \ldots, p_n$, costul produsului devine:

$$C_0\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)\left(1 + \frac{p_2}{100}\right)\ldots\left(1 + \frac{p_n}{100}\right).$$

Deci funcția determinantă, care trebuie să exprime prețul de cost al produsului după cele n variații succesive, va fi:

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_n) = C_0\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)\left(1 + \frac{p_2}{100}\right)\ldots\left(1 + \frac{p_n}{100}\right). \tag{15}$$

Dacă notăm cu $\bar{p}$ procentul mediu de variație a prețului de cost în fiecare din cele n perioade de timp, (15) devine:

$$F(\bar{p},\ \bar{p},\ \ldots,\ \bar{p}) = C_0\left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right)\left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right)\ldots\left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right). \tag{16}$$

Din (15) și (16) obținem ecuația:

$$C_0\left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right)\left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right)\ldots\left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right) =$$

$$= C_0\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)\left(1 + \frac{p_2}{100}\right)\ldots\left(1 + \frac{p_n}{100}\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

din care rezultă:

$$\left(1+\frac{\bar{p}}{100}\right)^n=\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdots\left(1+\frac{p_n}{100}\right), \tag{17}$$

$$\bar{p}=\left[\sqrt[n]{\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdots\left(1+\frac{p_n}{100}\right)}-1\right]\cdot 100.$$

Costul final (C_n) al produsului după n variații succesive a prețului de cost va fi:

$$C_n=C_0\left(1+\frac{\bar{p}}{100}\right)^n=C_0\prod_1^n\left(1+\frac{p_i}{100}\right).$$

Procentul total (q) de variație a prețului de cost după cele n variații succesive va fi:

$$q=100\left(\frac{C_n}{C_0}-1\right).$$

Dacă notăm:

$$\bar{c}=1+\frac{\bar{p}}{100}\ ;\quad c_i=1+\frac{p_i}{100}\ ;\quad i=1,2,\ldots,n;$$

relația (17) se scrie:

$$\bar{c}^n=c_1,\ c_2\ \ldots\ c_n;\quad \bar{c}=\sqrt[n]{c_1,\ c_2\ \ldots\ c_n},$$

și reprezintă coeficientul mediu de variație a prețului de cost.

Se constată că pentru rezolvarea problemei s-a folosit *media geometrică simplă.*

5. Consumul de benzină al unei mașini în unitate de timp (pe oră) este proporțională cu pătratul vitezei acelei mașini.

Dacă notăm cu:

t_i, $(i=1,2,\ldots,n)$, intervalele de timp în care a mers mașina;

v_i, $(i=1,2,\ldots,n)$, vitezele corespunzătoare acestor intervale, se cere să se determine viteza medie $\bar{v}$ cu care va trebui să meargă mașina, pentru ca în fiecare interval de timp să consume aceeași cantitate de benzină.

Soluție. Proprietatea determinantă este cantitatea totală de benzină consumată de mașină pe întreaga perioadă de timp $t=t_1+t_2+\ldots+t_n$.

Dacă notăm cu:

q_i, $(i=1,2,\ldots,n)$ cantitatea de benzină consumată în timpul t_i, vom putea scrie în baza enunțului:

$$q_i=k\cdot t_i\cdot v_i^2,$$

unde k este o constantă ce caracterizează consumul fiecărei mașini.

Ținînd seama de proprietatea determinantă care trebuie să reprezinte întreaga cantitate de benzină consumată în cele n perioade de timp, se obține funcția:

$$F(v_1,v_2,\ldots,v_n)=k\cdot t_1\cdot v_1^2+k\cdot t_2\cdot v_2^2+\ldots+k\cdot t_n\cdot v_n^2. \tag{18}$$

Cum funcția determinantă nu se schimbă dacă înlocuim pe v_i cu $\bar{v}$, rezultă:

$$F(\bar{v},\bar{v},\ldots,\bar{v})=k\cdot t_1\cdot\bar{v}^2+k\cdot t_2\cdot\bar{v}^2+\ldots+k\cdot t_n\cdot\bar{v}^2. \tag{19}$$

Scanned with OKEN Scanner

Egalînd relaţiile (18) cu (19), găsim:

$$k \cdot t_1 \cdot \bar{v}^2 + k \cdot t_2 \cdot \bar{v}^2 + \ldots + k \cdot t_n \cdot \bar{v}^2 =$$
$$= k \cdot t_1 \cdot v_1^2 + k \cdot t_2 \cdot v_2^2 + \ldots + k \cdot t_n \cdot v_n^2,$$

şi deci viteza medie $\bar{v}$, va fi:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{t_1 v_1^2 + t_2 v_2^2 + \ldots + t_n v_n^2}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}} = \sqrt{\frac{\Sigma t_i v_i^2}{t}}. \qquad (20)$$

Se constată că media care rezolvă problema este *media pătratică ponderată*.

Observaţie: Dacă notăm:

$$\frac{t_i}{t} = p_i; \quad \sum_1^n p_i = \frac{t_1}{t} + \frac{t_2}{t} + \ldots + \frac{t_n}{t} = \frac{\Sigma t_i}{t} = 1,$$

formula (20) se mai poate scrie şi sub forma:

$$\bar{v} = \sqrt{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_n v_n^2} = \sqrt{\Sigma p_i v_i^2}.$$

Concluzie. Teoria Chissini-Boiarschi ne permite să găsim valoarea medie a unui indicator economic sau tehnic, dintr-o serie de mărimi date ale acelui indicator (ce fac parte dintr-o colectivitate statistică).

În acest scop se constată care este proprietatea determinantă a colectivităţii, apoi se exprimă acea proprietate cu ajutorul unei funcţii $F(x_i)$, în care variabilele x_i fac parte din seria de mărimi date, a cărei medie o căutăm.

Folosind proprietatea prin care funcţia determinantă nu se schimbă cînd înlocuim pe x_i cu $\bar{x}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, se obţine ecuaţia:

$$F(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

din care se deduce media căutată $\bar{x}$.

§ 3. Relaţii între mărimile medii

Fie x_1, x_2 două numere pozitive $x_1 \geqslant x_2$.

$m_p = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$ = media pătratică,

$m_a = \frac{x_1 + x_2}{2}$ = media aritmetică,

$m_g = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ = media geometrică,

$m_h = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$ = media armonică,

$\max\{x_1, x_2\} = x_1$; $\min\{x_1, x_2\} = x_2$.

Scanned with OKEN Scanner

Se constată că:

$$x_1 \geqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \Rightarrow 2x_1^2 \geqslant x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow x_1 \geqslant x_2 \Rightarrow \max\{x_1\ x_2\} \geqslant m_p;$$

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geqslant \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow 2(x_1^2 + x_2^2) \geqslant (x_1 + x_2)^2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0 \Rightarrow m_p \geqslant m_a;$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1 x_2} \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \geqslant 4x_1 x_2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0 \Rightarrow m_a \geqslant m_g;$$

$$\sqrt{x_1 x_2} \geqslant \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \geqslant 4x_1 x_2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0 \Rightarrow m_g \geqslant m_h;$$

$$\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \geqslant x_2 \Rightarrow 2x_1 \geqslant x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 \geqslant x_2 \Rightarrow m_h \geqslant \min\{x_1, x_2\}.$$

Se obţin astfel următoarele relaţii între mărimile medii:

$$\max\{x_1, x_2\} \geqslant m_p \geqslant m_a \geqslant m_g \geqslant m_h \geqslant \min\{x_1, x_2\}. \tag{21}$$

Aceste relaţii se păstrează şi în cazul general a n numere pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$!

$$\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \geqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \geqslant \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Ne propunem să arătăm că relaţia $m_g \leqslant m_a$ este generală.

În acest scop vom demonstra următoarea teoremă:

Dacă suma a n numere pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este constantă ($x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nc$) produsul lor este maxim dacă numerele sînt egale ($x_1 = x_2 = \ldots = x_n = c$).

Demonstraţie. Presupunem că x_1 şi x_2 sînt variabile, iar $x_3, x_4, \ldots, x_n$ constante ($x_3 + x_4 + \ldots + x_n = a$; $x_3 \cdot x_4 \ldots x_n = \mathbf{A}$).

Cum prin ipoteză

$$x_1 + x_2 = nc - (x_3 + x_4 + \ldots + x_n) = nc - a = \text{constant},$$

produsul

$$x_1 \cdot x_2 (x_3 \cdot x_4 \ldots x_n) = \mathbf{A} \cdot x_1 \cdot x_2,$$

va deveni maxim odată cu produsul $x_1 x_2$ adică atunci cînd $x_1 = x_2$ (în baza teoremei de maxim T_1).

Nici un motiv nu ne opreşte să considerăm ca variabile, oricare pereche x_i, x_j ($i \neq j = 1, 2, \ldots, n$).

Scanned with OKEN Scanner

Urmînd același raționament pentru fiecare pereche x_i, x_j ajungem la concluzia că maximul produsului $x_1 \cdot x_2 \dots x_n$ va fi atins atunci cînd $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Cum prin ipoteză:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = nc \tag{22}$$

se deduce $x_1 + \dots + x_1 = nc \rightarrow nx_1 = nc \rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = c$;

$$\max (x_1 \cdot x_2 \dots x_n) = c^n.$$

Consecință. Din egalitatea obținută rezultă că în general:

$$x_1 \cdot x_2 \dots x_n < c^n. \tag{23}$$

Eliminînd pe c între (22) și (23) găsim:

$$x_1 \cdot x_2 \dots x_n < \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^n,$$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n} < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Aceasta înseamnă că, în general media geometrică este mai mică decît media aritmetică ($m_g < m_a$), egalitatea avînd loc atunci cînd $x_1 = x_2 = \dots = x_n = c$.

$$m_g = m_a = \sqrt[n]{c \cdot c \dots c} = \frac{c + c + \dots + c}{n} = c.$$

În acest caz, toate mărimile medii de ordinul r, ..., cubice, pătratice, aritmetice, geometrice, armonice, sînt egale între ele:

$$m_r = \dots = m_c = m_p = m_a = m_g = m_h = c.$$

§ 4. Interpretarea geometrică a mărimilor medii

Pe diametrul $|AF|$ al semicercului ABF cu centrul O și raza R (fig. 1) se consideră un punct arbitrar M ($M \neq A$; $M \neq F$) și notăm:

$$||AM|| = x_1;\ ||MF|| = x_2;\ \max\{x_1, x_2\} = x_1 = ||AM||;$$

$$\min\{x_1, x_2\} = x_2 = ||MF||,$$

$$||MB|| = \sqrt{||OM||^2 + ||OB||^2} = \sqrt{(||OF - MF||)^2 + ||OF||^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = m_p,$$

$$||MC|| = ||OD|| = ||OF|| = \frac{||AM|| + ||MF||}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = m_a,$$

$$||MD|| = \sqrt{||AM|| \cdot ||MF||} = \sqrt{x_1 \cdot x_2} = m_g,$$

$$||ME|| = \frac{||MD||^2}{||MC||} = \frac{x_1 \cdot x_2}{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{2x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = m_h.$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, avem și următoarele relații între segmente (fig. 1):

$$||MA|| \geqslant ||MB|| \geqslant ||MC|| \geqslant ||MD|| \geqslant ||ME|| \geqslant ||MF||, \qquad (24)$$

sau, dacă ținem seama de semnificația lor, rezultă:

$$\max\{x_1, x_2\} \geqslant m_p \geqslant m_a \geqslant m_g \geqslant m_h \geqslant \min\{x_1, x_2\},$$

identice cu relațiile (21) obținute mai sus.

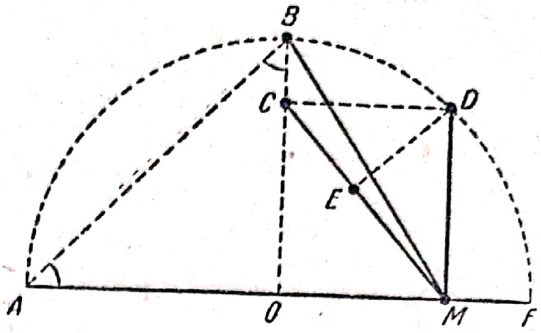


Fig. 1.

Relațiile (24) se justifică astfel:

$||MA|| > ||MB||$, deoarece în ΔABM laturii $|AM|$ i se opune un unghi mai mare decît laturii $|MB|$ $(m\overset{\frown}{ABM}) = (m\overset{\frown}{ABO}) + (m\overset{\frown}{OBM}) = 45° + (m\overset{\frown}{OBM})$, iar $(m\overset{\frown}{BAM}) = 45°$;

$||MB|| > ||MC||$, deoarece $||BM||$ este o oblică mai depărtată de piciorul perpendicularei $|MO|$ decît oblica $||MC||$ $(||OB|| > ||OC||)$;

$||MC|| > ||MD||$, deoarece $|MC|$ este ipotenuză, iar $|MD|$ catetă în ΔMDC;

$||MD|| > ||ME||$, deoarece $|MD|$ este ipotenuză, iar $|ME|$ catetă în ΔMED;

$||ME|| > ||MF||$, deoarece $||ME|| - ||MF|| = (||CM|| - ||CE||) - (||OF|| - ||OM||) = ||OM|| - ||CE|| = ||CD|| - ||CE|| > 0$ ($|CD|$ este ipotenuză, iar $|CE|$ catetă în ΔCDE).

Observații: — Dacă $x_1 = x_2$, punctul M se confundă cu O. Relațiile (21) și (24) vor fi satisfăcute cu semnul egal:

$$||MA|| = ||MB|| = ||MC|| = ||MD|| = ||ME|| = ||MF|| = R.$$

— Mărimile segmentelor $|MB|$, $|MC|$, $|MD|$, $|ME|$ reprezintă: *media pătratică, aritmetică, geometrică și armonică*, toate avînd o extremitate comună M situată pe diametrul $|AF|$.

§ 5. Teoreme de maxim și minim, demonstrate cu ajutorul unor relații între mărimile medii

Teorema de maxim (T_1).

Dacă suma puterilor p a n numere pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este constantă, produsul lor este *maxim*, dacă numerele sînt egale.

Demonstrație. Folosind relația între mărimile medii:

$$m_g \leqslant m_{ap}\ ; \quad \Rightarrow \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}},$$

se constată că în general, m_g este mai mică decît m_{ap}. Valoarea sa maximă se obține atunci cînd $m_g = m_{ap}$ și are loc dacă $x_1 = \ldots = x_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm $x_1^p + \ldots + x_n^p = nc^p$; din $m_g = m_{ap}$ se deduce: $\max(x_1 \ldots x_n) = c^n$ și are loc dacă $x_1 = \ldots = x_n = c$ (c.c.t.d).

În particular, pentru $p = 1, 2, 3, \ldots, r$, teorema T_1 se enunță astfel:

Dacă suma pătratelor, suma cuburilor, ..., suma puterilor de ordinul r a n numere pozitive $x_1, \ldots, x_n$ este constantă, produsul lor este maxim cînd numerele sînt egale.

Cazul particular $p = 1$; $n = 2$

Dacă suma a două numere pozitive x_1, x_2 *este constantă* $(x_1 + x_2 = 2c)$, *produsul lor este maxim, cînd numerele sînt egale* (sau dacă nu pot fi egale, atunci cînd diferența lor este minimă[1]).

Demonstrația **1.** *Folosind identitatea algebrică:*

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2,$$

se obține

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4}[(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2].$$

Cum prin ipoteză $x_1 + x_2 = 2c =$ constant, rezultă că:

$$\max(x_1 \cdot x_2) = \frac{1}{4} \max[4c^2 - (x_1 - x_2)^2],$$

și are loc atunci cînd $(x_1 - x_2)^2 = 0$; sau $x_1 = x_2$.

Se deduce $x_1 = x_2 = c$; $\max(x_1 \cdot x_2) = c^2$ · (c.c.t.d).

Demonstrația **2.** *Metoda geometrică.*

Pe diametrul $|AB|$ al semicercului de centru O și rază R se consideră punctul C. Ducem $|CD| \perp |AB|$; $|OE| \perp |AB|$ și notăm $||AC|| = x_1$; $||CB|| = x_2$ (fig. 2).

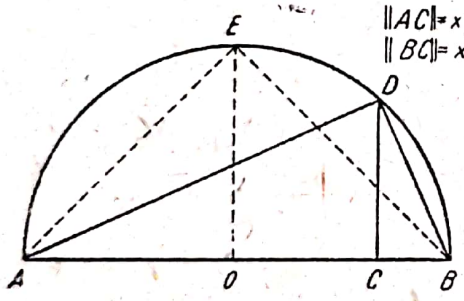


Fig. 2.

Din ΔADB rezultă $||DC||^2 = ||AC|| \cdot ||CB|| = x_1x_2$. Cum $x_1 + x_2 = ||AB|| = 2R =$ constant, $||DC||$ este maxim cînd $D = E$, iar $C = O$. În acest caz:

$$x_1 = ||AO||; \quad x_2 = ||OB||;$$
$$||AO|| = ||OB|| = R;$$
$$\max(x_1 x_2) = ||AO|| \cdot ||OB|| = R^2;$$
$$x_1 = x_2 = R. \text{ (c.c.t.d)}$$

Demonstrația **3.** *Folosind relația între mărimile medii:*

$$m_g \leqslant m_a; \quad \sqrt{x_1 \cdot x_2} \leqslant \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Media geometrică este mai mică sau egală decît media aritmetică. Valoarea sa *maximă*, se obține atunci cînd $m_g = m_a$; adică atunci cînd $x_1 = x_2$ (c.c.t.d).

[1] Această observație se menține în toate cazurile similare.

Scanned with OKEN Scanner

Cum $x_1 + x_2 = 2c$, rezultă $x_1 = x_2 = x$; $\max(x_1 x_2) = c^2$.

Cazul particular $p = 2$; $n = 2$.

Dacă suma pătratelor a două numere pozitive x_1, x_2 *este constantă* ($x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$), *produsul lor este maxim cînd numerele sînt egale.*

Demonstrația **1.** *Folosind identitatea algebrică:*

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = (x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1^2x_2^2,$$

se deduce

$$x_1x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2}.$$

Cum prin ipoteză $x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$ (constant), rezultă că:

$$\max(x_1 \cdot x_2) = \frac{1}{2}\max\sqrt{4c^4 - (x_1^2 - x_2^2)^2},$$

și se obține atunci cînd $(x_1^2 - x_2^2)^2 = 0$; $x_1 = x_2$.

$$(x_1 \cdot x_2) = c^2;\ x_1 = x_2 = c \text{ (c.c.t.d).}$$

Demonstrația **2.** *Metoda geometrică.*

Pe diametrul $|AB|$ al semicercului de centru O și rază R (fig. 3) se consideră un punct C. Ducem $||CD| \perp |AB|$; $|EO| \perp |AB|$ și notăm $||AD|| = x_1$; $||DB|| = x_2$.

Cum $||AD||^2 + ||DB||^2 = ||AB||^2 \rightarrow$ $\rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 4R^2$ (constant). Produsul

$$P = x_1 \cdot x_2 = ||AD|| \cdot ||DB|| =$$
$$= ||AB|| \cdot ||DC|| = 2R \cdot ||DC||;$$

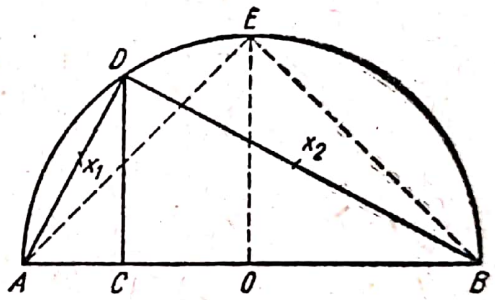


Fig. 3.

iar

$$\max(x_1 \cdot x_2) = 2R \cdot \max||DC||.$$

Dar $\max||DC|| = ||OE|| = R$ (punctul C se confundă cu O, iar D cu E).

În acest caz $\max(x_1 \cdot x_2) = ||AE|| \cdot ||EB|| = ||AB|| \cdot ||OE|| =$ $= 2R \cdot R = 2R^2$ și are loc dacă $x_1 = x_2 = ||AE|| = R\sqrt{2}$.

Rezultă că: dacă $x_1^2 + x_2^2 = 4R^2 =$ constant; $\max(x_1 \cdot x_2) = 2R^2$ și are loc dacă $x_1 = x_2 = R\sqrt{2}$ (c.c.t.d).

Demonstrația **3.** *Folosim relația între mărimile medii:*

$$m_g \leqslant m_p \Rightarrow \sqrt{x_1 \cdot x_2} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Se constată că în general, media geometrică este mai mică decît media pătratică. Valoarea sa *maximă* se obține atunci cînd $m_g = m_p$ și are loc dacă $x_1 = x_2$.

Dacă notăm $x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$; din $m_g = m_p$ se deduce:

$\max(x_1 \cdot x_2) = c^2$ și are loc dacă $x_1 = x_2 = c$ (c.c.t.d).

Scanned with OKEN Scanner

Teorema de maxim (T_2).

Dacă suma puterilor p a n numere pozitive $x_1, \ldots, x_n$ este constantă, suma lor este *maximă* cînd numerele sînt egale.

Demonstrație. Folosind relația între mărimile medii:

$$m_a \leqslant m_{ap} \rightarrow \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \sqrt[p]{\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}},$$

se constată că m_a este în general mai mică decît m_{ap}.

Valoarea sa maximă se obține atunci cînd $m_a = m_{ap}$ și are loc dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Dacă notăm $x_1^p + \ldots + x_n^p = nc^p$, din $m_a = m_{ap}$ se deduce:

$$\max(x_1 + \ldots + x_n) = nc; \text{ iar } x_1 = \ldots = x_n = c \text{ (c.c.t.d)}$$

În particular, pentru $p = 2, 3, \ldots, r$, teorema de maxim T_2 se enunță astfel: dacă suma pătratelor, suma cuburilor, ..., suma puterilor de ordinul r a n numere pozitive $x_1, \ldots, x_n$ este constantă, suma lor este maximă, cînd numerele sînt egale.

Cazul particular $p = 2$; $n = 2$

Dacă suma pătratelor a două numere pozitive x_1, x_2 este constantă ($x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$), suma lor este *maximă*, dacă numerele sînt egale.

Demonstrația **1.** *Folosind identitatea algebrică:*

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2),$$

se obține

$$x_1 + x_2 = \sqrt{2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 - x_2)^2}.$$

Cum prin ipoteză $x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$ (constant), rezultă că:

$$\max(x_1 + x_2) = \max \sqrt{4c^2 - (x_1 - x_2)^2},$$

și are loc dacă $(x_1 - x_2)^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$ (c.c.t.d).

Se deduce $x_1 = x_2 = c$; $\max(x_1 + x_2) = 2c$.

Demonstrația **2.** *Metoda geometrică*

În pătratul $ABCD$ (fig. 4) ducem $|EF| \parallel |BC|$; $|E'F| \parallel |AB|$ și notăm:

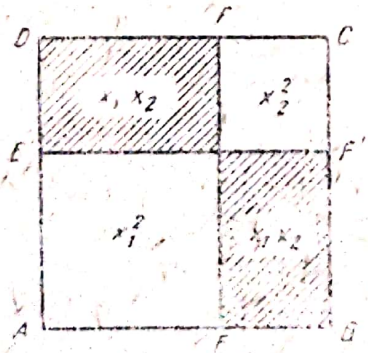


Fig. 4.

$$||AE|| = ||DF|| = ||AE'|| = ||BF'|| = x_1;$$

$$||EB|| = ||FC|| = ||CF'|| = ||DE'|| = x_2;$$

$$||AB|| = l.$$

Cum prin ipoteză suma ariilor celor două pătrate nehașurate este constantă: $x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$ (constant), aria pătratului $ABCD = (x_1 + x_2)^2$ va fi maximă, odată cu aria celor două dreptunghiuri hașurate ($x_1\, x_2$).

Scanned with OKEN Scanner

Cum $x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$ (constant), produsul x_1x_2 va fi maxim dacă $x_1 = x_2 = c$ (cele două dreptunghiuri devin pătrate).

Rezultă că $\max (x_1 + x_2) = 2c = l$ și are loc dacă $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$ (c.c.t.d).

Demonstrația **3.** *Folosind relația între mărimile medii:*

$$m_a \leqslant p_p;\ \frac{x_1 + x_2}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}},$$

se constată că în general media aritmetică este mai mică decît media pătratică. Valoarea sa *maximă* se obține atunci cînd $m_a = m_p$ și are loc dacă $x_1 = x_2$.

Dacă notăm $x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$, din $m_a = p_m$ se deduce:

$$\max (x_1 + x_2) = 2c, \text{ iar } x_1 = x_2 = c. \text{ (c.c.t.d).}$$

Teorema de maxim (T_3)

Dacă suma a două numere pozitive x, y *este constantă* $(x + y = c)$, *produsul* $P = x^m \cdot y$ *este maxim dacă* $x = my$.

Demonstrație. Considerăm produsul $mP = mx^m y$ scris sub forma: $mP = x \cdot x \ldots x \cdot my = x \cdot x \ldots x\,(mc - mx)$.

Cum m este constant, max P se va realiza odată cu max (mP).

Cum suma factorilor ce compun produsul mP este constantă:

$$x + x + \ldots + x + (mc - mx) = mx + mc - mx = mc,$$

rezultă că max (mP) și deci max P se va realiza atunci cînd factorii sînt egali:

$$x = x = \ldots = x = mc - mx.$$

Se deduce $x + mx = mc$; $x = mc : (m + 1)$, iar din $x + y = c$ rezultă $y = c - x = c - mc : (m + 1) = c : (m + 1)$; sau $x : y = m$; $x = my$ (c.c.t.d).

În mod analog se arată că:

Dacă suma a două numere pozitive este constantă $(x + y = c)$, produsul $P = x \cdot y^n$ este maxim dacă $y = nx$.

Sau, mai general:

Dacă suma a două numere pozitive este constantă $(x + y = c)$, *produsul* $P = x^m \cdot y^n$ *este maxim dacă* $nx = my$.

Demonstrație. Considerăm produsul $m^n \cdot n^m \cdot P = m^n \cdot n^m \cdot x^m \cdot y^n = (nx)^m \cdot (my)^n = (nx \cdot nx \ldots nx) \cdot (my \cdot my \ldots my) = nx \cdot nx \ldots nx \cdot (mc - mx)(mc - mx) \ldots (mc - mx)$.

Deoarece suma factorilor ce compun acest produs este constantă:

$$(nx + nx + \ldots + nx) + (mc - mx) + (mc - mx) + \ldots + (mc - mx) =$$
$$= mnx + n(mc - mx) = mnc = \text{constant};$$

produsul

$$m^n \cdot n^m \cdot P,$$

deci și produsul P este maxim atunci cînd factorii acestui produs sînt egali:

$$nx = mc - mx;\ x(m + n) = mc;\ x = mc : (m + n).$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă: $y = c - x = c - mc : (m + n) = nc : (m + n) \rightarrow y : x = n : m$; sau $nx = my$. (c.c.t.d).

Cazul particular $m = 2$; $n = 1$

Dacă suma a două numere pozitive x, y este constantă $(x + y = c)$, produsul $P = x^2y$ este maxim dacă $x = 2y$.

Teorema de minim (T_1)

Dacă produsul a n numere pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este constant $(x_1 x_2 \ldots x_n = c^n)$, suma puterilor p a celor n numere este *minimă*, dacă acele numere sînt egale.

Demonstrație. Folosind relația între mărimile medii:

$$m_{ap} \geqslant m_g \rightarrow \sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}$$

se constată că media aritmetică de ordinul p este *mai mare* sau cel mult egală cu media geometrică.

Valoarea *minimă* se obține atunci cînd cele două mărimi medii sînt egale și are loc dacă $x_1 = \ldots = x_n$.

Cum prin ipoteză $x_1 \ldots x_n = c^n =$ constant, din $m_{ap} = m_g$ se deduce: $\min (x_1^p + \ldots + x_n^p) = nc^p$ și are loc atunci cînd cele n numere sînt egale, $x_1 = \ldots = x_n = c$. (c.c.t.d).

În particular, pentru $p = 1, 2, 3, \ldots, r$; teorema de minim T_1 se enunță astfel: dacă produsul a n numere pozitive este constant, atunci suma, suma pătratelor, suma cuburilor, ..., suma puterilor de ordinul r a acelor n numere este minimă, dacă numerele sînt egale.

Cazul particular $p = 1$; $n = 2$

Dacă produsul a două numere pozitive x_1, x_2 *este constant* $(x_1 x_2 = c^2)$, *suma lor este minimă, dacă numerele sînt egale*

Demonstrația **1.** *Folosind identitatea evidentă:*

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2,$$

se deduce

$$x_1 + x_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2}.$$

Cum prin ipoteză, $x_1x_2 = c^2$ (constant), rezultă că:

$$\min (x_1 + x_2) = \min \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4c^2},$$

și se obține atunci cînd $(x_1 - x_2)^2 = 0$; $x_1 = x_2 = c$; $\min (x_1 + x_2) = 2c$ (c.c.t.d).

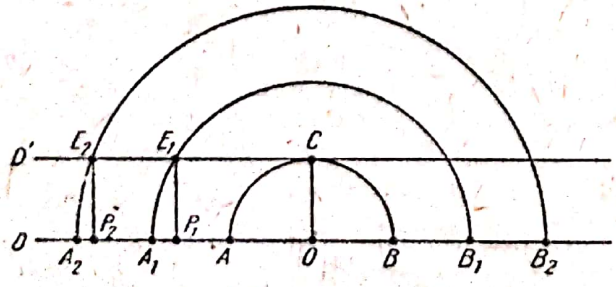


Fig. 5.

Demonstrația **2.** *Metodă geometrică*

Fie dreptele $D \| D'$. Se descriu semicercurile concentrice cu centrul în O și de diametri: $|AB|$, $|A_1B_1|$, $|A_2B_2|$, ... (fig. 5).

Ducem: $|CO| \perp |AB|$; $|E_1P_1| \perp \perp |A_1B_1|$; $|E_2P_2| \perp |A_2B_2|$; ...

Teorema înălțimii aplicată în $\triangle ACB$; $\triangle A_1E_1B_1$; $\triangle A_2E_2B_2$; ne permite să scriem: $||CO||^2 = ||AO|| \cdot ||OB||$; $||E_1P_1||^2 = ||A_1P_1|| \cdot ||P_1B_1||$; $||E_2P_2||^2 = ||A_2P_2|| \cdot ||P_2B_2||$; ...

Cum $||CO|| = ||E_1P_1|| = ||E_2P_2|| = \ldots$, deoarece am presupus $D||D'$, rezultă că:

$$||AO|| \cdot ||OB|| = ||A_1P_1|| \cdot ||P_1B_1|| =$$
$$= ||A_2P_2|| \cdot ||P_2B_2|| = \ldots = \text{constant.}$$

Sumele factorilor acestor produse sînt:

$$||AO|| + ||OB|| = ||AB||; \quad ||A_1P_1|| + ||P_1B_1|| = ||A_1B_1||;$$
$$||A_2P_2|| + ||P_2B_2|| = ||A_2B_2||; \ldots$$

Se constată că minimul acestor sume este $||AB||$. În acest caz avem $||AO|| = ||OB||$. Minimul sumelor are loc atunci cînd numerele sînt egale. Putem enunța deci următoarea teoremă: dacă produsul a două numere este constant ($||AO|| \cdot ||OB|| = ||A_1P_1|| \cdot ||P_1B_1|| = ||A_2P_2|| \cdot ||P_2B_2|| = \ldots = ||CO||^2 =$ constant) suma acelor numere este minimă, dacă numerele sînt egale (c.c.t.d).

Demonstrația **3.** *Folosind relația între media aritmetică și media geometrică a două numere pozitive* x_1, x_2.

$$m_a \geqslant m_g; \quad \frac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1 \cdot x_2}; \quad x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Media aritmetică este în general mai mare decît media geometrică, valoarea sa minimă se obține atunci cînd $m_a = m_g$, adică atunci cînd $x_1 = x_2$ (c.c.t.d).

Cazul particular $p = 2$; $n = 2$

Dacă produsul a două numere pozitive x_1, x_2 *este constant* ($x_1 \cdot x_2 = c^2$), *suma pătratelor lor este minimă, dacă numerele sînt egale.*

Demonstrația **1.** *Folosind identitatea evidentă:*

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = (x_1^2 - x_2^2)^2 + 4\,x_1^2x_2^2,$$

se obține

$$x_1^2 + x_2^2 = \sqrt{(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1^2x_2^2}.$$

Cum prin ipoteză $x_1x_2 = c^2$ (constant), obținem:

$$\min\,(x_1^2 + x_2^2) = \min\sqrt{(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4 \cdot c^4},$$

și are loc dacă $x_1^2 - x_2^2 = 0$, sau $x_1 = x_2 = c$. (c.c.t.d).

Demonstrația **2.** *Metodă geometrică.*

Din punctul fix A exterior cercului cu centrul O (fig. 6) se duc tangentele $|AT|$, $|AT'|$ și secanta ABC. Fie I mijlocul coardei $|BC|$ ($|BI| = |IC|$; $|OI| \perp |BC|$).

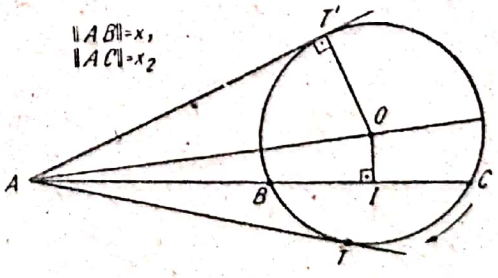


Fig. 6.

Dacă notăm $||AT|| = k$ = constant, putem scrie:

$$||AB|| \cdot ||AC|| = ||AT||^2 = k^2;\ ||AB||^2 + ||AC||^2 = (||AI|| - ||BI||)^2 + (||AI|| + ||CI||)^2 = (||AI|| - ||BI||)^2 + (||AI|| + ||BI||)^2 = 2||AI||^2 + 2||BI||^2 = 2(||AI||^2 + ||BI||^2).$$

Cînd secanta $|AC|$ se deplasează în sensul indicat de săgeată pînă cînd devine tangentă la cerc, punctul I se confundă cu T. Segmentele $|AI|$ și $|BI|$ se micșorează, astfel încît în momentul în care I se confundă cu T; $|AB| \equiv |AC| \equiv |AT|$; $||BI|| = 0$ și suma $||AB||^2 + ||AC||^2$ devine minimă, $\min(||AB||^2 + ||AC||^2) = 2||AT||^2$.

Dacă notăm $||AB|| = x_1$; $||AC|| = x_2$; avem: $||AB|| \cdot ||AC|| = x_1 x_2 = ||AT||^2 = k^2$.

Suma $||AB||^2 + ||AC||^2 = x_1^2 + x_2^2 = 2(||AI||^2 + ||IB||^2)$ este minimă, dacă $I = T$ ($|AI| \equiv |AT|$ și $||BI|| = 0$). $\min(x_1^2 + x_2^2) = 2||AT||^2$ și are loc dacă $x_1 = x_2 = ||AT|| = k$ (c.c.t.d).

Demonstrația **3.** *Folosind relația între mărimile medii:*

$$m_p \geqslant m_g;\ \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geqslant \sqrt{x_1 \cdot x_2};\ x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Media pătratică este în general *mai mare* decît media geometrică; valoarea sa *minimă* se obține atunci cînd $m_p = m_g$; adică atunci cînd $x_1 = x_2$ (c.c.t.d).

Cum $x_1 x_2 = c^2$, rezultă $x_1 = x_2 = c$; $\min(x_1^2 + x_2^2) = 2c^2$.

Teorema de minim (T_2).

Dacă suma a n numere pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este constantă, suma puterilor p a acelor numere este *minimă*, dacă acele numere sînt egale.

Demonstrație. Folosind relația între mărimile medii:

$$m_{ap} \geqslant m_a \to \sqrt[p]{\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}} \geqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n};$$

se constată că m_{ap} este în general mai mare decît m_a.

Valoarea sa *minimă* se obține atunci cînd cele două medii sînt egale, și are loc dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Dacă notăm $x_1 + \ldots + x_n = nc$; din $m_{ap} = m_a$ se deduce: $\min(x_1^p + \ldots + x_n^p) = nc^p$ și are loc atunci cînd $x_1 = \ldots = x_n = c$ (c.c.t.d).

În particular, pentru $p = 2, 3, \ldots, r$, teorema T_2 se enunță astfel:

Dacă suma a n numere pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este constantă ($x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nc$), suma pătratelor, suma cuburilor, ..., suma puterilor de ordinul r este minimă, atunci cînd acele numere sînt egale.

Cazul particular $p = 2$; $n = 2$.

Dacă suma a două numere pozitive x_1, x_2 este constantă ($x_1 + x_2 = 2c$), suma pătratelor lor este *minimă* dacă numerele sînt egale.

Demonstrația **1.** *Folosind identitatea evidentă:*

$$2(x_1^2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

se obține:

$$\min (x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2} \min [(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2].$$

Cum prin ipoteză $x_1 + x_2 = 2c$ (constant), rezultă că:

$$\min (x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2} \min 4[c^2 + (x_1 - x_2)^2],$$

și are loc dacă $(x_1 - x_2)^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$ (c.c.t.d).

Se deduce $x_1 = x_2 = c$; $\min (x_1^2 + x_2^2) = 2c^2$.

Demonstrația **2.** *Metoda geometrică*

În pătratul $ABCD$ (fig. 7) ducem $|EF| \,||\, |BC|$; $|E'F'| \,||\, |AB|$ și notăm:

$$||AE|| = ||DF|| = ||DE'|| = ||CF'|| = x_1;$$

$$||EB|| = ||FC|| = ||BF'|| = ||AE'|| = x_2.$$

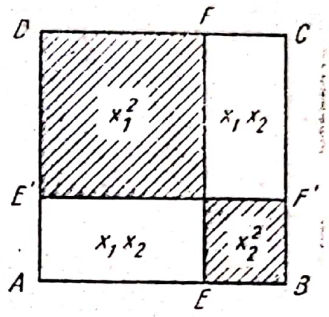


Fig. 7.

Cum prin ipoteză $x_1 + x_2 = ||AB|| = l =$ = constant, suma ariilor celor două pătrate haşurate $x_1^2 + x_2^2$ va fi *minimă*, cînd suma ariilor celor două dreptunghiuri $2x_1x_2$ va fi maximă.

Cum $x_1 + x_2 = l$ = constant, produsul x_1x_2 va fi maxim, dacă $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$ (cele două pătrate sînt egale).

Rezultă că $\min (x_1^2 + x_2^2) = \frac{l^2}{2}$ și are loc cînd $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$ (c.c.t.d).

Demonstrația **3.** Folosind relația între media aritmetică m_a și media pătratică m_p a două numere x_1, x_2:

$$m_p \geqslant m_a; \quad \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geqslant \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Media pătratică este în general mai mare decît media aritmetică; valoarea sa minimă se obține atunci cînd cele două mărimi medii sînt egale $m_p = m_a$, și are loc dacă $x_1 = x_2$.

Cum prin ipoteză $x_1 + x_2 = 2c$ = constant, din $m_p = m_a$ se deduce: $\min (x_1^2 + x_2^2) = 2c^2$ și are loc dacă $x_1 = x_2 = c$. (c.c.t.d).

Teorema de minim T_3

Dacă produsul $x^m y^n$ este constant ($x^m y^n = c$), suma $x + y$ este minimă dacă $nx = my$.

Este reciproca teoremei de maxim T_3. Dacă $x + y = c$, produsul $x^m \cdot y^n$ este maxim dacă $nx = my$.

Cazul particular $m = 2$; $n = 1$.

Dacă $x^2y = c$; $\min (x + y) = 3 \cdot \sqrt[3]{c : 4}$, și are loc pentru $x = 2y = 2 \cdot \sqrt[3]{c : 4}$.

Cazul particular $m = 1$, $n = 2$.

Dacă $xy^2 = c$; $\min (x + y) = 3 \cdot \sqrt[3]{c : 4}$, și are loc pentru $y = 2x = 2 \cdot \sqrt[3]{c : 4}$.

CAPITOLUL II

PROBLEME DE MAXIM ŞI DE MINIM (TRATATE ELEMENTAR)

În acest capitol vom rezolva cîteva probleme de maxim şi minim pe cale elementară, cu ajutorul teoremelor deduse în capitolul I, sau alte metode simple, *fără a folosi noţiunea de derivată.*

§ 1. Probleme de maxim

1. *Dintr-o foaie dreptunghiulară din tablă (sau carton) de arie* $S = 192\ m^2$, *se cere să se confecţioneze un rezervor paralelipipedic fără capac, de volum maxim.*

Soluţie. Dacă notăm cu x, y dimensiunile bazei, cu z înălţimea şi cu V volumul cutiei, se cere max. $V = \max\ (x \cdot y \cdot z)$, astfel ca:

$$S = xy + 2xz + 2yz = 192. \tag{1}$$

Dar produsul acestor termeni este:

$$(xy) \cdot (2xz) \cdot (2yz) = 4x^2y^2z^2 = 4\,(xyz)^2 = 4V^2.$$

În baza teoremei de maxim T_1 (cazul particular $p = 1$, $n = 3$), suma $S = xy + 2xz + 2yz$ fiind constantă $(S = 192)$,

$$\max\ 4V^2 = \max\,(xy) \cdot (2xz) \cdot (2yz)$$

şi deci max V, va avea loc atunci cînd factorii acestui produs vor fi egali:

$$xy = 2xz = 2yz, \qquad x = y = 2z. \tag{2}$$

Dacă ţinem seama de (1) şi (2) se deduce:

$$xy + xy + xy = 192;\ xy = 64;\ x^2 = 64;\ x = y = 8;\ z = 4.$$

Deci, cutia va avea baza unui pătrat cu latura 8 m, înălţimea 4 m, iar max $V = 8 \cdot 8 \cdot 4 = 256\ m^3$.

2. *Din mulţimea triunghiurilor care au acelaşi perimetru* (48 *m*) *să se determine triunghiul de arie maximă.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Se știe că aria unui triunghi în funcție de laturile lui x, y, z este dată de formula [1]:

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Cum prin ipoteză toate triunghiurile au același perimetru $2p = 48$; $p = 24$ = constant, rămîne să cercetăm maximul produsului:

$$P = (p-x)(p-y)(p-z).$$

Dar suma:

$$(p-x) + (p-y) + (p-z) = 3p - (x+y+z) = 3p - 2p$$

fiind constantă, în baza teoremei de maxim T_1 (cazul particular $p = 1$, $n = 3$), produsul P va fi maxim, cînd cei 3 factori vor fi egali:

$$p - x = p - y = p - z; \Rightarrow x = y = z = 16; \quad \max S = 64 \cdot \sqrt{3}.$$

Rezultă că, *dintre toate triunghiurile cu același perimetru, triunghiul echilateral are aria maximă.*

3. *Dintre toate patrulaterele cu același perimetru* (64 m), *inscriptibile într-un cerc, care este acela de arie maximă?*

Soluție. Dacă notăm cu v, x, y, z lungimile laturilor unui patrulater inscriptibil, cu $2p$ perimetrul lui, aria lui S este dată de formula:

$$S = \sqrt{(p-v)(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Cum suma celor 4 factori este constantă:

$$(p-v) + (p-x) + (p-y) + (p-z) = 4p - (v+x+y+z) =$$
$$= 4p - 2p = 2p = 64,$$

în baza aceleiași teoreme de maxim T_1 (cazul $p = 1$, $n = 4$), produsul celor 4 factori de sub radical va fi maxim dacă factorii sînt egali:

$$p - v = p - x = p - y = p - z \rightarrow v = x = y = z = 16; \max S = 256.$$

Rezultă că *patrulaterul maxim înscris în cerc este pătratul.*

4. *Dintr-o foaie de tablă de arie dată $S = 60$ m², se cere să se construiască un rezervor paralelipipedic închis a cărui volum să fie maxim.*

Soluție. Notăm cu x, y, z, cele trei dimensiuni ale rezervorului, cu $S = 2(xy + yz + zx) = 60$, aria totală și cu $V = xyz$, volumul lui. Dar max V se va realiza odată cu max $V^2 = \max (x^2y^2z^2) = \max (xy) \cdot (yz) \cdot (zx)$.

Cum suma $xy + yz + xz = S : 2 = 30$ este constantă, max V^2 (și deci max V) se va obține atunci cînd cei trei termeni ai sumei vor fi egali:

---

[1] Matematicienii arabi Abul-Vafa și Al Biruni (în cartea *Despre aflarea coardei unui cerc*, cunoscută pentru prima oară în 1910) relatează un fapt care a impresionat cercurile științifice contemporane: vestita teoremă pentru determinarea ariei unui triunghi cu ajutorul laturilor $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, cunoscută nouă din lucrările lui Heron din Alexandria (sec. 1–2), și denumită teorema lui Heron, a fost descoperită de Arhimede (c. 287–212 î.e.n.) și publicată în lucrarea sa *Cartea cercurilor.*

$xy = yz = zx$, sau $x = y = z$. Rezervorul va fi deci un cub. Se deduce: $x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2 = S : 2 = 30 \rightarrow x = \sqrt{S : 6}$; $\max V = \sqrt{6S^3} : 36 = S\sqrt{6S} : 36$. În exemplul dat, rezervorul va fi un cub de latură $\sqrt{10}$ m, cu volumul maxim egal cu $10\sqrt{10}$ m^3.

5. *Dintr-o foaie de carton (tablă, material plastic) în formă de poligon regulat cu n laturi ($n = 3, 4, 6, 8$) se cere să se confecționeze o cutie fără capac avînd forma unei prisme regulate drepte cu același număr de laturi, astfel încît capacitatea ei să fie maximă.*

Soluție. Considerînd poligonul un octogon regulat, situația se prezintă ca în fig. 8. Pentru a obține o prismă se procedează astfel:

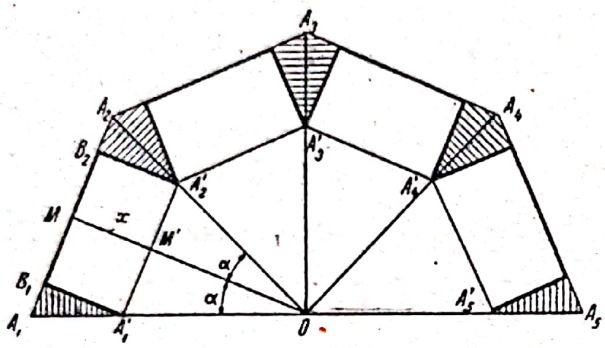


Fig. 8.

Se decupează figurile haşurate, apoi, dreptunghiurile rămase se vor îndoi după laturile $|A'_1A'_2|$, $|A'_2A'_3|$, ..., $|A'_8A_1|$, pînă cînd planul lor va fi perpendicular pe planul foii. Se obține astfel o cutie fără capac în formă de prismă regulată, avînd ca bază octogonul $A'_1A'_2 \ldots A'_8$ și înălțimea $||MM'|| = x$.

Dacă notăm $||OM|| = a$, $||OM'|| = a'$, apotema poligonului dat și a poligonului de bază, cu S și S' ariile acestor poligoane, în baza unei teoreme cunoscute[1] putem scrie:

$$\frac{S'}{S} = \frac{a'^2}{a^2}; \quad S' = \frac{S}{a^2}a'^2 = \frac{S}{a^2}(a - x)^2.$$

Funcția a cărei maxim se caută, adică volumul prismei va fi:

$$V = S' \cdot x = \frac{S}{a^2}(a - x)^2 \cdot x = k(a - x)^2 \cdot x = k \cdot u^2 \cdot v.$$

Cum $u + v = a - x + x = a =$ constant, în baza teoremei de maxim T_3 (cazul particular $m = 2$), produsul $u^2 \cdot v$ va fi maxim atunci cînd $u = 2v$; sau $a - x = 2x$; $x = a : 3$.

Dacă notăm cu $l = ||A_1A_2|| = ||A_2A_3|| = \ldots = ||A_nA_1||$, latura poligonului dat, din figura 8 se deduce:

$$||MA_1|| = ||OM|| \operatorname{tg}\alpha; \quad l = 2a \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right);$$

$$\max V = \frac{S}{a^2}\left(a - \frac{a}{3}\right)^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{4aS}{27} = \frac{2nla^2}{27} = \frac{nl^3}{54}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Observații: — Se constată că mărimea $||MM'|| = x$ ce corespunde lui V max este egală cu 1/3 din apotema poligonului dat.

---

[1] Raportul ariilor a două poligoane regulate, este egal cu pătratul raportului lungimilor laturilor sau apotemelor.

Scanned with OKEN Scanner

— Pentru $n = 3, 4, 6, 8$ se obţin rezultatele din tabela :

n	3	4	6	8
x	$\frac{l\sqrt{3}}{18}$	$\frac{l}{6}$	$\frac{l\sqrt{3}}{6}$	$\frac{l(1+\sqrt{2})}{6}$
V max	$\frac{l^3}{54}$	$\frac{2l^3}{27}$	$\frac{l^3}{3}$	$\frac{4l^3(3+2\sqrt{2})}{27}$

în care înălţimea x a cutiei precum şi V max au fost exprimate în funcţie de latura l a poligonului dat.

— Pentru cutiile cu baza un pătrat (cele mai frecvente în practică) situaţia se prezintă ca în fig. 9. După decuparea pătrăţelelor haşurate, dreptunghiurile rămase se vor îndoi de-a lungul liniilor punctate, perpendiculare pe planul foii.

Se va obţine astfel o cutie în formă de prismă cu baza un pătrat a cărei volum va fi maxim şi egal 2/27 din volumul cubului de latură egală cu latura pătratului dat ($V = 2l^3/27$).

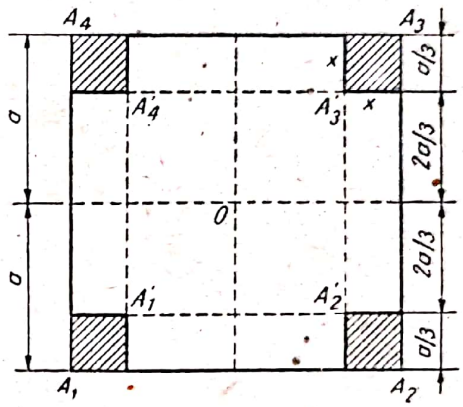


Fig. 9.

6. *Dintr-o foaie de carton (sau alt material) de forma unui poligon regulat cu n laturi, se cere să se construiască o cutie în formă de piramidă regulată dreaptă, a cărei bază să fie un poligon regulat cu acelaşi număr de laturi, astfel încît capacitatea ei să fie maximă.*

Soluţie. Considerăm octogonul regulat $A_1A_2 \ldots A_8$ (fig. 10) şi notăm: $||OA_1|| = R$, raza cercului circumscris poligonului $A_1A_2 \ldots A_8$; $||OM|| = a'$, apotema poligonului de bază $A_1'A_2' \ldots A_8'$; $||MA_1|| = x$ apotema piramidei obţinută după decuparea triunghiurilor haşurate şi îndoirea triunghiurilor rămase pînă cînd se întîlnesc toate într-un singur punct (vîrful piramidei).

În general, în cazul unui poligon cu n laturi se obţine succesiv :

$$\frac{S'}{S} = \frac{a'^2}{a^2};$$

$$S' = \frac{S}{a^2}a'^2 = \frac{S}{a^2}(R-x)^2,$$

unde a, a' sînt apotemele iar S, S' ariile poligoanelor $A_1A_2 \ldots A_n$ şi respectiv $A_1'A_2' \ldots A_n'$.

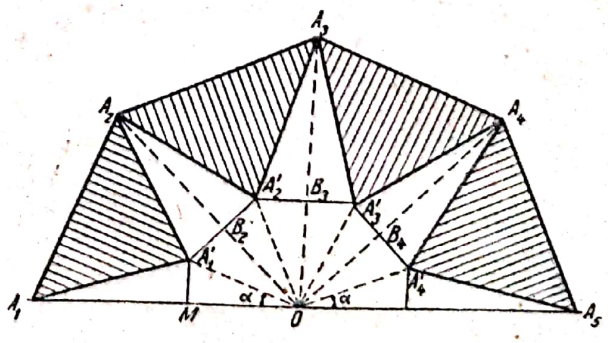


Fig. 10.

Cînd A_1 ajunge în vîrful piramidei, se obține triunghiul dreptunghic OA_1M în care $||OA_1|| = i$, este înălțimea piramidei.

Se deduce:

$$i^2 = x^2 - a'^2;$$

$$i = \sqrt{x^2 - (R - x)^2} = \sqrt{2Rx - R^2};$$

$$V = \frac{S'i}{3} = \frac{S}{a^2}(R - x)^2 \cdot \sqrt{2Rx - R^2} = k(R - x)^2 \cdot \sqrt{2Rx - R^2}.$$

Maximul lui V se va realiza odată cu

$$\max (2R)^4 \cdot V^2 = (2R)^4 \cdot k^2(R - x)^4 \cdot (2Rx - R^2) =$$
$$= k^2 \cdot (2R^2 - 2Rx)^4 \cdot (2Rx - R^2);$$

$$V^2 = cu^4 \cdot v;\ c = k^2 = (2R)^4;\ u = 2R^2 - 2Rx;\ v = 2Rx - R^2.$$

În baza teoremei de maxim T_2 (cazul particular $n = 4$), produsul $u^4 \cdot v$ (în care suma $u + v = 2R^2 - 2Rx + 2Rx - R^2 = R^2 = \text{constant}$) va fi maxim atunci cînd $u = 4v$; sau: $2R^2 - 2Rx = 4(2Rx - R^2)$, din care se obține $x = 3R/5$.

Cum din $\triangle OA_1B$; $||OB|| = ||OA_1||\cos\alpha$; $a = R\cos\alpha$; $R = a\sec\alpha$; $x = \frac{3a}{5}\sec\alpha$; $\max V = \frac{S}{3a^2}\left(R - \frac{3R}{5}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{6R^2}{5} - R^2} = \frac{4\sqrt{5}}{375} \cdot \frac{SR^2}{a^2}$; $l = 2R\sin\alpha$.

Dar

$$S = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{nla}{2} = \frac{nl}{2} \cdot R \cdot \cos\alpha = nR^2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\max V = \frac{4\sqrt{5}}{375} \cdot nR^3 \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Observații: — Se constată că apotema piramidei ce corespunde lui V max este egală cu 3/5 din raza cercului circumscris poligonului dat $A_1A_2 \ldots A_n$.

n	3	4	6	8
l	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R	$\frac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
V max	$\frac{4\sqrt{15}}{125}R^3$	$\frac{16\sqrt{5}}{375}R^3$	$\frac{8\sqrt{15}}{375}R^3$	$\frac{32\sqrt{5}(\sqrt{2} - 1)}{375}R^3$

— Pentru $n = 3, 4, 6, 8$ se obțin rezultatele din tabelă.

Scanned with OKEN Scanner

— Construcţia cutiei este posibilă dacă

$$0 \leqslant a' \leqslant \frac{R}{2}$$

aşa cum se vede din figura 10 ($||OM|| \leqslant ||OA_1|| : 2$). Cazurile limită

$$a' = \frac{R}{2} \quad \text{şi} \quad a' = 0$$

conduc la un volum nul.

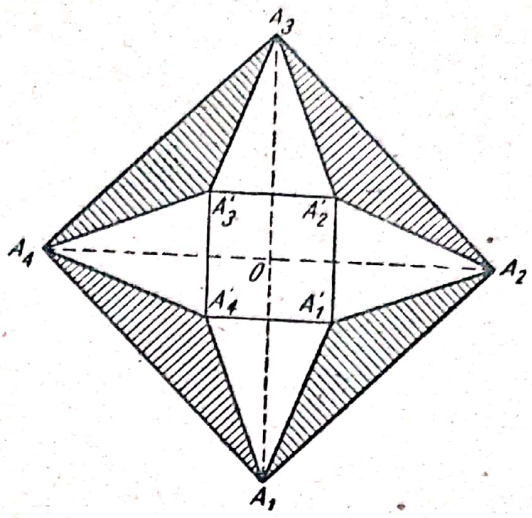


Fig. 11.

— Pentru $n = 4$, construcţia este dată în figura 11. După decuparea triunghiurilor haşurate şi îndoirea triunghiurilor rămase de-a lungul dreptelor $A_1'A_2'$, $A_2'A_3'$, $A_3'A_4'$, $A_4'A_1'$ pînă cînd se întîlnesc într-un vîrf comun, se obţine o piramidă regulată dreaptă cu baza un pătrat. Dacă $a' = 2R : 5$, volumul este maxim şi egal cu $16R^3\sqrt{5} : 375$.

7. *Dintr-o foaie de tablă circulară de rază R se cere să se construiască o pîlnie conică de volum maxim.*

Soluţie. Din cercul dat se scoate un sector circular ce corespunde unui unghi la centru $\widehat{AOB} = \alpha$ (fig. 12).

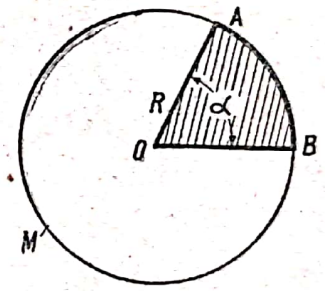


Fig. 12.

După scoaterea sectorului AOB şi alipirea razelor $|OA|$ şi $|OB|$ se obţine un con, în care lungimea arcului $\overset{\frown}{AMB}$ devine lungimea cercului de bază a conului, iar $||OA|| = ||OB|| = R$ devin generatoare ale conului.

Dacă notăm cu r şi i, raza şi înălţimea conului, din fig. 13 se deduce succesiv:

$$2\pi r = \frac{\pi R(360° - \alpha)}{180°} = 2\pi Rx;$$

$$r = Rx;$$

$$x = (360° - \alpha) : 360°.$$

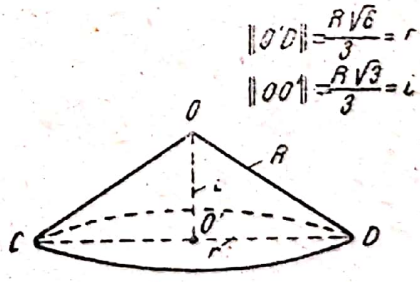


Fig. 13.

Cum înălţimea i a conului se poate găsi din $\triangle COO'$ (fig. 13);

$$i^2 = R^2 - r^2; \quad i = \sqrt{R^2 - R^2x^2} = R\sqrt{1 - x^2};$$

funcţia a cărei maxim se caută, adică volumul conului, va fi:

$$V = \frac{\pi r^2 i}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot R^2x^2 \cdot R\sqrt{1 - x^2} = kx^2 \cdot \sqrt{1 - x^2}; \quad k = \pi R^3 : 3.$$

Maximul lui V are loc odată cu $\max V^2 = \max k^2x^4(1-x^2) = k^2 \max (x^2)^2(1-x^2) = k^2 \max u^2 \cdot v$; unde $u = x^2$; $v = 1 - x^2$.

Cum $u + v = x^2 + 1 - x^2 = 1 =$ constant, în baza teoremei de maxim T_3 (cazul particular $n = 2$), produsul $u^2 \cdot v$, este maxim dacă $u = 2v$ sau $x^2 = 2(1 - x^2)$. Se deduce:

$$x = \frac{\sqrt{6}}{3}; \quad \frac{360° - \alpha}{360°} = \frac{\sqrt{6}}{3}; \quad \alpha = 360° - 120°\sqrt{6}; \quad \alpha = 66°3'40'';$$

$$r = \frac{\sqrt{6}}{3}R; \quad i = \frac{\sqrt{3}}{3}R; \quad \max V = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \cdot R^2 \approx \frac{2}{5}R^3.$$

Probleme propuse

1. Un trunchi de arbore de formă cilindrică cu diametrul d trebuie transformat într-o grindă de secţiune dreptunghiulară, astfel încît să prezinte maximum de rezistenţă la încovoiere.

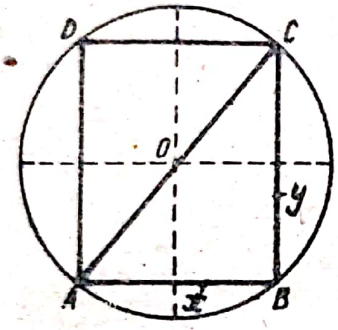


Fig. 14.

R. Dacă notăm cu x şi y cele două dimensiuni ale secţiunii dreptunghiulare (fig. 14) rezistenţa la încovoiere este maximă odată cu modulul de rezistenţă al secţiunii transversale a grinzii, care este dat de expresia:

$$W = xy^2 : 6,$$

sau

$$36\,W^2 = x^2 \cdot (y^2)^2.$$

Cum $x^2 + y^2 = d^2$, $\max W$ are loc dacă $y^2 = 2x^2$. Se va găsi $x = d\sqrt{3} : 3$; $y = d\sqrt{6} : 3$; $\max W = d^3\sqrt{3} : 27$.

2. Dintr-o foaie de tablă de a decimetri lăţime se confecţionează un jgheab a cărei secţiune este un trapez. În acest scop, tabla se îndoaie în lungime pe ambele părţi cu cîte o fîşie de aceeaşi lăţime, astfel ca pereţii laterali să formeze cu fundul jgheabului unghiuri de 60° (fig. 15).

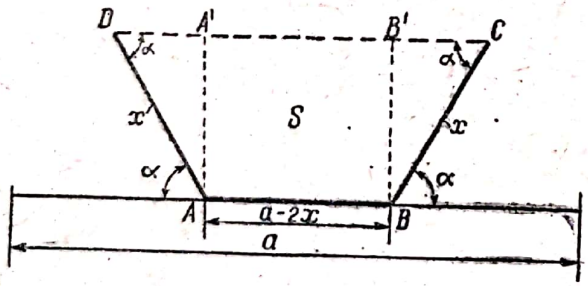


Fig. 15.

Ce lăţime trebuie să aibă fîşiile îndoite, pentru ca debitul apei care se scurge prin acest jgheab să fie maxim?

R. Maximul debitului Q se va realiza odată cu maximul secţiunii prin jgheab, care este trapezul $ABCD$.

Funcţia al cărui maxim se caută este $S = \sqrt{3}(2ax - 3x^2) : 4$.

Max S se va realiza odată cu maximul binomului $(2ax - 3x^2)$, sau cu $\max 3x(2a - 3x)$. Cum $3x + 2a - 3x = 2a =$ const. $\max S$ are loc cînd $3x = 2a - 3x$, sau $x = a/3 \cdot \max S = a\sqrt{3} : 12$.

3. Se cere capacitatea maximă a unui cilindru deschis la un capăt (pahar cilindric), ştiind că suprafaţa lui (S) este dată.

Scanned with OKEN Scanner

R. Dacă notăm cu x și y, raza și înălțimea cilindrului, se cere $\max V = \max \pi x^2 y$, știind că $2\pi xy + \pi x^2 = \pi(2xy + x^2) = S$; $V^2 = \pi^2 x^4 y^2 = (\pi/2)^2 \cdot (2xy)^2 \cdot x^2$. Suma $2xy + x^2$ fiind constantă $\max V$ are loc cînd $2xy = 2x^2$, sau $x = y = \sqrt{S : 3}$; $\max V = \sqrt{S^3 : 27\pi}$.

Așa se construiesc unele măsuri de volum, pentru a economisi materialul din care sînt confecționate, sau pentru a le face mai ușoare.

4. Se cere să se construiască un rezervor cilindric a cărui suprafață totală $S = 6\pi m^2$, astfel încît capacitatea lui să fie maximă.

R. Dacă notăm cu x și y raza și înălțimea cilindrului; se cere $\max V = \max \pi x^2 y$, știind că $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy = \text{constant}$.

Capacitatea maximă se va obține atunci cînd înălțimea este egală cu diametrul de bază; $y = 2x$. Se va găsi $x = \sqrt{S : 6\pi}$, $y = 2\sqrt{S : 6\pi}$; $\max V = \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. În exemplul dat: $x = 1m$, $y = 2m$, $\max V = 2\pi m^3$.

5. Într-un semicerc se duc coarde paralele cu diametrul, care prin rotirea lor în jurul diametrului dau cilindre circulare drepte. Care dintre ele este maxim?

R. Fie r raza semicercului și $2x$ lungimea coardei. Se obține $V = 2\pi x \cdot (r^2 - x^2)$, $\max V$ se va realiza atunci cînd $x = r\sqrt{3} : 3$; iar $\max V = 4\pi \cdot r^3\sqrt{3} : 9$.

6. Dintre toate conurile cu suprafața laterală dată (S), care este acela cu volum maxim?

R. Dacă notăm cu x, y raza și înălțimea conului, se obține:

$$\max V^2 = \max \cdot x^4(x^2y^2)^2, \quad S = \pi x\sqrt{x^2 + y^2}; \quad x^4 + x^2y^2 = c; \quad x^2y^2 = 2x^4;$$

$$y^2 = 2x^2.$$

Se va găsi $y = x\sqrt{2}$; $x = \sqrt[4]{S^2 : 3\pi^2}$; $y = \sqrt[4]{4S^2 : 3\pi^2}$.

7. Dintre toate conurile cu suprafața totală dată (S) care este acela cu volumul maxim?

R. Folosind aceleași notații ca în problema 6, găsim:

$$S = \pi x^2 + \pi xg = \pi x(x + g), \quad V = \frac{\pi}{3}x^2y; \quad g^2 = x^2 + y^2.$$

Se va găsi $g = 3x$; $y = 2\sqrt{2}x$; $\max V = \sqrt{S^3 : 72\pi}$.

8. Care este cilindrul de volum maxim înscris într-un con dat (de rază r și înălțimea h)?

R. Dacă notăm cu x, y și V, raza, înălțimea și volumul cilindrului căutat, din figura 16 se constată că $\triangle AOC \sim \triangle A'O'C$.

Se deduce $r : x = (h - y) : h$, $x = r(h - y) : h$, $V = \pi r^2(h - y)^2 \cdot y : h^2 \cdot \max V$ se obține odată cu maximul produsului $(h - y)^2y$. Cum suma factorilor $h - y + y = h$ este constantă $\max V$ are loc atunci cînd $h - y = 2y$.

Se obține $y = h : 3$; $x = \frac{2r}{3}$; $\max V = 4\pi r^2 h : 27 = 4/9\ V$.

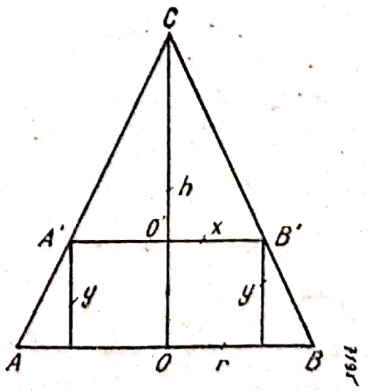


Fig. 16.

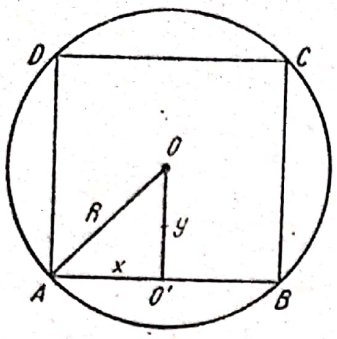


Fig. 17.

9. Care este cilindrul de volum maxim înscris într-o sferă de rază dată R?

R. Folosind notaţiile din figura 17 se obţine:

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

$$V = 2\pi x^2 y;$$

$$V^2 = 4\pi^2 (x^2)^2 \cdot y^2.$$

Cum $x^2 + y^2 = R^2$; max V are loc pentru $x^2 = 2y^2$. Rezultă: $x = R\sqrt{6} : 3$; $y = R\sqrt{3} : 3$; max $V = 4\pi R^3 \sqrt{3} : 9$.

10. Care este cilindrul cu aria laterală maximă înscris într-o sferă de rază dată R?

R. Din fig. 17 se obţine: $x^2 + y^2 = R^2$; $S = 4\pi xy$; $S^2 = 16\pi^2 \cdot x^2 y^2$. Cum $x^2 + y^2 = R^2 =$ constant, max S are loc atunci cînd $x = y$. Înălţimea cilindrului trebuie să fie cît diametrul cercului ($i = 2r$).

max $S = 2\pi R^2$ şi are loc pentru $x = y = R\sqrt{2} : 2$. Suprafaţa laterală maximă a cilindrului este egală cu suprafaţa semisferei.

11. Un con cu raza bazei r şi înălţimea h este înscris într-o sferă de rază R. Se face o secţiune cu un plan paralel cu baza conului. Se cere distanţa $d(C, O')$ de la vîrful conului la plan pentru care coroana circulară dintre sferă şi con să fie de arie maximă.

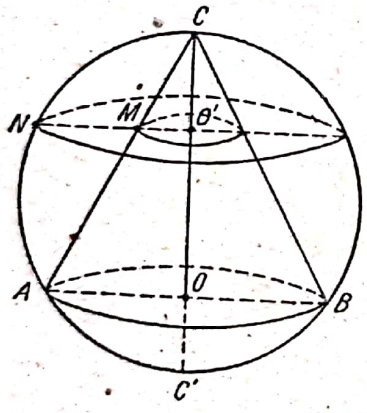


Fig. 18.

R. Folosind notaţiile din fig. 18 se obţine:

$$S = \pi(||O'N||^2 - ||O'M||^2).$$

Cum

$$||O'N||^2 = ||CO'|| \cdot ||C'O'|| = CO' \cdot (2R - ||CO'||),$$

iar din

$$\triangle MCO' \sim \triangle ACO;$$

$$||MO'|| : ||CO'|| = ||AO|| : ||CO|| = r : h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||MO'|| = ||CO'|| \cdot r : h$$

şi

$$r^2 + h^2 = ||AC||^2 = ||CC'|| \cdot ||CO|| = 2R \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2\pi R \cdot ||CO'|| \cdot (h - ||CO'||) : h.$$

Cum

$$||CO'|| + h - ||CO'|| = h = \text{constant},$$

max S are loc pentru

$$||CO'|| = h : 2; \quad \max S = \pi R h : 2.$$

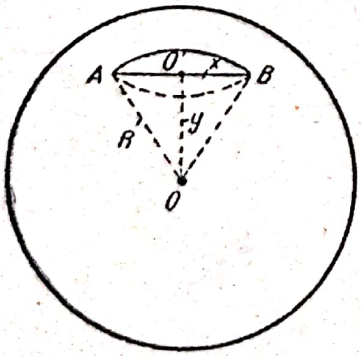


Fig. 19.

12. Se cere conul de volum maxim, ştiind că are vîrful în centrul unei sfere de rază R şi baza un cerc mic situat pe sferă.

R. Folosind notaţiile din fig. 19 se va găsi: $V = \pi x^2 y : 3 = \pi y(R^2 - y^2) : 3$; $V^2 =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \pi^2(R^2 - y^2)^2 \cdot y^2 : 9$; $R^2 - y^2 + y^2 = R^2 =$ constant şi deci max V are loc atunci cînd $R^2 - y^2 = 2y^2$; $y = R\sqrt{3} : 3$; $x = R\sqrt{6} : 3$; max $V = 2\pi R^3\sqrt{3} : 27$.

§ 2. Probleme de minim

1. *Volumul unui rezervor cilindric fără capac este* $64\ \pi m^3$. *Se cer dimensiunile cilindrului pentru care costul tablei din care este confecţionat rezervorul să fie minim.*

Soluţie. Dacă notăm $r = x$ şi $i = y$ raza şi înălţimea cilindrului, funcţia a cărei minim se cere este:

$$S = \pi x^2 + 2\pi xy = \pi(x^2 + 2xy).$$

Cum prin ipoteză $V = \pi x^2 y = 64\pi =$ constant, rezultă că şi $V^2 = \pi^2 x^4 y^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot (2xy)^2 \cdot (x^2) = (64\pi)^2 =$ constant.

Dacă notăm $u = 2xy$; $v = x^2$; avem $u^2 \cdot v = k$. În baza teoremei de minim T_3 (cazul particular $m = 2$, $n = 1$), suma $u + v$ (şi deci aria S) va fi minimă dacă $u = 2v$, sau $2xy = 2x^2$.

Se obţine $x = y$ (sau $r = i$). Raza cilindrului va fi egală cu înălţimea şi deci $\pi x^2 \cdot x = 64\pi$; $x^3 = 64$; $x = y = 4$m.

Minimul ariei din care va fi confecţionat rezervorul va fi:

$$\min S = \min\ (x^2 + 2xy)\pi = (4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 4)\pi = 48\pi\ \ m^2.$$

2. *Dintre toate triunghiurile de aceeaşi arie, care este triunghiul de perimetru minim?*

Soluţie. Aria triunghiului este dată de formula:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

Cum prin ipoteză este constantă, rezultă:

$$(p-a)(p-b)(p-c) = S^2 : p = \text{constant}.$$

În baza teoremei de minim T_1 (cazul particular $p = 1$, $n = 3$). Suma $(p-a) + (p-b) + (p-c) = 3p - (a+b+c) = 3p - 2p = p$, şi deci perimetrul triunghiului va fi minim dacă factorii sînt egali: $p - a = p - b = p - c$. Rezultă $a = b = c$, adică triunghiul echilateral are perimetrul minim.

3. *Să se determine pe latura* $|BC|$ *a unui triunghi oarecare* ABC *un punct* M *astfel încît suma pătratelor distanţelor la cele* 3 *vîrfuri să fie minimă.*

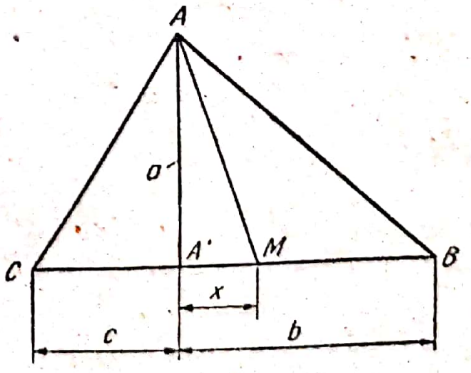


Fig. 20.

Soluţie. Notăm cu A' piciorul perpendicularei din A pe latura $|BC|$; $||AA'|| = a$; $||BA'|| = b$; $||CA'|| = c$; $||A'M|| = x$ (fig. 20).

Funcţia a cărei maxim se cere este suma:

$$S = ||MA||^2 + ||MB||^2 + ||MC||^2 = (a^2 + x^2) + (b - x)^2 + (c + x)^2 =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 3x^2 - 2bx + 2cx = a^2 + b^2 + c^2 + x[3x - 2 \cdot (b - c)].$$

Suma S va fi minimă dacă $x[2(b - c) - 3x]$ sau $3x[2(b - c) - 3x]$ va fi maximă. Cum $3x + 2(b - c) - 3x = 2(b - c) =$ constant, produsul $3x[2(b - c) - 3x]$ va fi maxim cînd factorii sînt egali:

$$3x = 2(b - c) - 3x, \text{ sau } x = (b - c) : 3.$$

$$\min S = a^2 + b^2 + c^2 - (b - c)^2 : 3.$$

Observaţie. Dacă triunghiul este isoscel sau echilateral $b = c$; $x = 0$, punctul M coincide cu piciorul înălţimii $|AA'| \cdot \min S = a^2 + b^2 + c^2$.

4. *Să se determine dimensiunile unei cutii paralelipipedice fără capac de volum dat V ştiind că dimensiunile bazei sînt într-un raport constant k, astfel ca suprafaţa totală să fie minimă.*

Soluţie. Notăm cu x, y dimensiunile bazei, cu z înălţimea, cu S aria cutiei fără capac şi cu V volumul.

Se obţine:

$$y : x = k;\ y = kx;\ V = xyz = kx^2z, \tag{3}$$

$$S = xy + 2xz + 2yz = kx^2 + 2(1 + k)xz. \tag{4}$$

Eliminăm pe z între relaţiile (3) şi (4):

$$S = 2V(1 + k) : kx + kx^2.$$

Dacă notăm:

$$u = 2V(1 + k) : kx;\ v = kx^2;\ \text{se constată că: } u^2 \cdot v =$$

$= 4V^2(1 + k)^2 : k^2x^2 \cdot kx^2 = 4V^2(1 + k)^2 : k =$ constant, şi deci în baza teoremei de minim T_3 (cazul particular $m = 2$, $n = 1$) suma $S = u + v$ va fi minimă dacă $u = 2v$, sau $2V(1 + k) : kx = 2kx^2$. Se deduce:

$$x^3 = \frac{V(1 + k)}{k^2};\ y^3 = Vk(1 + k);\ z^3 = \frac{Vk}{(1 + k)^2};$$

$$xy = (1 + k)\sqrt[3]{\frac{V^2}{k(1 + k)}};\ xz = \sqrt[3]{\frac{V^2}{k(1 + k)}};\ yz = k\sqrt[3]{\frac{V^2}{k(1 + k)}}.$$

$$\min S = xy + 2xz + 2yz = 3\sqrt{V^2 \cdot (1 + k)^2 : k}.$$

În cazul particular $x = y$; avem $k = 1$; $x = y = \sqrt[3]{2V}$; $z = \sqrt[3]{2V} : 2$; sau $2z = x = y$; $\min S = 3\sqrt[3]{4V^2}$. Înălţimea cutiei este egală cu jumătate din latura bazei.

Exemplu. Dacă $V = 4$ dm³; $x = y = 2$ dm; $z = 1$ dm; $\min S = 12$ dm².

Observaţie. Soluţia optimă ne permite să construim cutii sau rezervoare paralelipipedice de capacitate dată (fără capac) avînd raportul dimensiunilor bazei cunoscut, astfel încît costul materialului (tablă, carton, lemn, ...) folosit să fie minim, şi în acelaşi timp să fie mai uşoare.

Scanned with OKEN Scanner

5. *Se cer dimensiunile unui rezervor paralelipipedic cu capac, avînd capacitatea $V = 125$ m³, astfel încît costul tablei din care este construit să fie minim.*

Soluţie. Dacă notăm cu x, y, z dimensiunile cutiei, se cere minimul funcţiei $S = 2(xy + yz + zx)$, cu condiţia $V = xyz = 125$. Cum $V^2 = x^2y^2z^2 = (xy)(yz)(zx) = 125^3 = \text{constant}$, în baza teoremei de minim T_1 (cazul particular $p = 1$; $n = 3$), suma lor $xy + yz + zx$ este minimă dacă $xy = yz = zx$, sau $x = y = z$. Din $xyz = 125$ rezultă $x^3 = 125$; $x = y = z = 5$.

Minimul ariei totale va fi: $\min S = 2(25 + 25 + 25) = 150$ m².

Suprafaţa rezervorului şi deci costul tablei va fi minim, dacă rezervorul va fi un cub cu latura de 5 m.

6. *Fie OX, OY două şosele perpendiculare $OX \perp OY$ şi A, B două localităţi situate în interiorul unghiului XOY. Să se determine punctele $M \in Ox$ şi $N \in Oy$, astfel încît costul drumului $AMNB$ să fie minim.*

Soluţie. Dacă A' este simetricul lui A faţă de axa OX iar B' simetricul lui B faţă de axa OY drumul $AMNB$ este egal cu drumul $A'MNB'$ deoarece

$$||AD|| \equiv ||A'D||$$

iar

$$||BE|| \equiv ||B'E||.$$

Drumul minim va fi egal cu distanţa cea mai scurtă între punctele $A'B'$ (fig. 21).

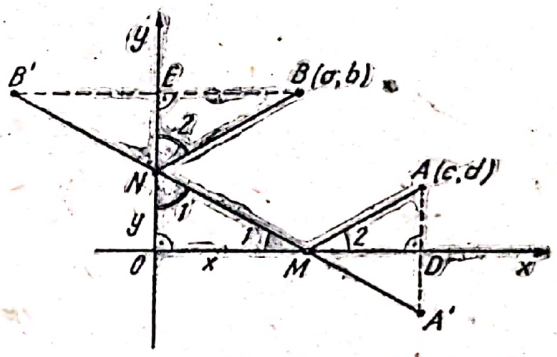


Fig. 21.

Punctele M şi N se obţin astfel: se construiesc punctele A', B' simetrice faţă de OX respectiv OY, apoi se unesc. Intersecţia dreptei $A'B'$ cu axele OX, OY ne vor da punctele M respectiv N.

Folosind notaţiile $||OM|| = x$; $||ON|| = y$; $||OD|| = c$; $||AD|| = d$; $||OE|| = b$; $||BE|| = a$ şi ţinînd seama că $\triangle AMD \sim \triangle OMN \sim \triangle NBE$ (avînd $\hat{O} \equiv \hat{D} \equiv \hat{E} = 90°$, $\hat{M}_1 \equiv \hat{M}_2$, $\hat{N}_1 \equiv \hat{N}_2$) găsim proporţiile:

$$x : y = (c - x) : d; \qquad x : y = a : (b - y).$$

Se deduce:

$$x = \frac{bc - ad}{b + d} = ||OM||;$$

$$y = \frac{bc - ad}{a + c} = ||ON||.$$

7. *Dintre segmentele sferice cu volum constant, să se determine acela cu aria calotei minimă.*

Soluţie. Dacă notăm $||CO'|| = x =$ înălţimea segmentului sferic, şi cu R raza sferei (fig. 22), avem $V = \pi x^2(3R - x) : 3 = \text{constant}$. Se cere minimul ariei $S = 2\pi Rx$. Dar $\min Rx$ se va realiza odată cu $\max 1 : Rx$ ştiind că $x^2(3R - x) = 3V : \pi = c^3$,

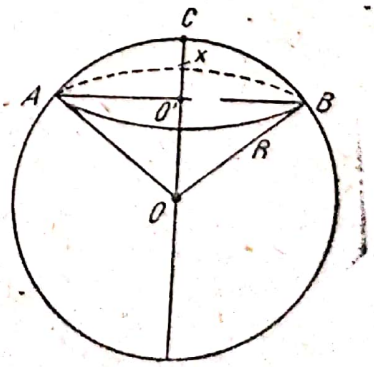


Fig. 22.

relație care se poate scrie $(c^3 : Rx^2) + (x : R) = 3$. Se observă însă că: $\left(\frac{c^3}{Rx^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{R}\right) = \left(\frac{c^2}{Rx}\right)^3$, care este maximă odată cu $\frac{1}{Rx}$.

În baza teoremei de maxim T_8 (cazul particular $m = 2$; $n = 1$) maximul produsului are loc cînd $c^3 : Rx^2 = 2(x : R)$ sau $c^3 = 2x^3$. Înlocuind pe c^3 în relația de condiție găsim:

$$2x^3 : Rx^2 + x : R = 3,$$

de unde $x = R$. Calota cerută este o semisferă.

8. *Să se determine poziția T de amplasare a unei uzine termoelectrice ce urmează a deservi 3 localități A, B, C nesituate în linie dreaptă, astfel încît lungimea conductelor (deci și costul instalației) care leagă uzina cu cele 3 localități să fie minimă.*

Soluție. Problema se poate enunța astfel: să se determine poziția unui punct T situat în interiorul unui triunghi ABC astfel ca suma $S = ||TA|| + ||TB|| + ||TC||$ să fie minimă.

Din punctul T care satisface condiția de minim, laturile triunghiului se văd sub un unghi de 120° ($\widehat{ATB} \equiv \widehat{BTC} \equiv \widehat{CTA} = 120°$).

Demonstrație. Rotim triunghiul BCT cu 60° în jurul vîrfului C (fig. 23). Rezultă $|CB''| \equiv |CB|$; $|CT'| \equiv |CT|$. Triunghiul TCT' avînd $|CT| \equiv |CT'|$ și $\widehat{TCT'} = 60°$ este echilateral și deci $|TT'| \equiv |TC|$. În mod analog se arată că $\triangle BCB''$ este echilateral avînd $|CB| \equiv |CB''|$ și $\widehat{BCB''} = 60°$; deci $|BB''| \equiv |BC| \equiv |B''C|$.

$\triangle CT'B''$ este noua poziție a $\triangle BTC$, după rotirea acestuia cu 60°, deci $|TB| \equiv |T'B''|$, iar suma $S = ||TA|| + ||TC|| + ||TB|| = ||TA|| + ||TT'|| + ||T'B''||$. Dar drumul $||AT|| + ||TT'|| + ||T'B''||$ va fi cel mai scurt atunci cînd T și T' vor fi situate pe dreapta AB'' care este fixă (B'' are o poziție independentă de T). Deci, punctul T va fi pe dreapta care unește vîrful A cu vîrful B'' al triunghiului echilateral construit pe latura BC. În mod analog punctul T se află pe dreptele

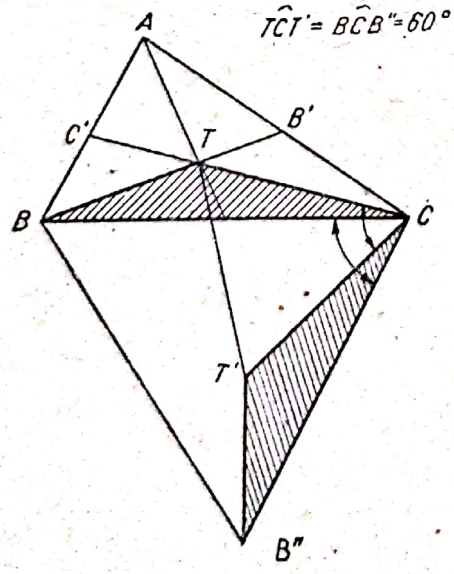


Fig. 23.

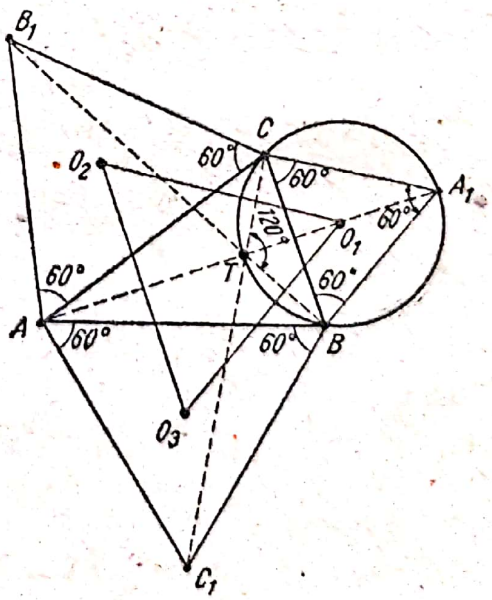


Fig. 24.

care unesc vîrfurile B și C cu vîrfurile B_1 și C_1 ale triunghiurilor echilaterale construite pe laturile $|AC|$ și $|AB|$ (fig. 24).

Cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale construite pe laturile triunghiului ABC se numesc cercurile lui Torricelli[1], iar punctul T care satisface proprietatea de minim se numește „punctul lui Torricelli".

Punctul T se obține, construind în afara triunghiului ABC, triunghiurile echilaterale ABC_1, BCA_1, CAB_1 și unind vîrfurile opuse. Din figura 24 rezultă $\widehat{ATB} \equiv \widehat{BTC} \equiv \widehat{CTA} = 120°$ (c.c.t.d).

Calculul sumei $||TA|| + ||TB|| + ||TC||$.

Vom arăta mai întîi că $||TB|| + ||TC|| = ||TA_1||$. Patrulaterul TBA_1C fiind inscriptibil ($\widehat{BTC} + \widehat{BA_1C} = 120° + 60° = 180°$), teorema lui Ptolemeu ne conduce la relația:

$$||TA_1|| \cdot ||BC|| = ||A_1C|| \cdot ||TB|| + ||A_1B|| \cdot ||TC||. \quad (5)$$

(Produsul diagonalelor într-un patrulater inscriptibil este egal cu suma produselor laturilor opuse).

Cum triunghiul BCA_1 este echilateral $|BC| \equiv |A_1C| \equiv |A_1B|$. După simplificare relația (5) devine $||TB|| + ||TC|| = ||TA_1||$ (c.c.t.d).

Rezultă că

$$||TA|| + ||TB|| + ||TC|| = ||TA|| + ||TA_1|| = ||AA_1||.$$

Pentru a obține pe $||AA_1||$ aplicăm teorema cosinusului în triunghiul

$$AA_1B: ||AA_1||^2 = ||AB||^2 + ||A_1B||^2 - 2||AB|| \cdot ||A_1B|| \cdot \cos \widehat{ABA_1} =$$

$$= c^2 + a^2 - 2ac\cos(\widehat{B} + 60°) = c^2 + a^2 - ac\cos\widehat{B} + ac\sqrt{3}\sin\widehat{B}. \quad (6)$$

Aceeași teoremă aplicată în $\triangle ABC$ ne dă:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\widehat{B}; \quad -ac\cos\widehat{B} = (b^2 - c^2 - a^2) : 2 \quad (7)$$

Din formula ariei unui triunghi $S = ac\sin\widehat{B} : 2$;

$$ac\sin B = 2S. \quad (8)$$

Folosind (7) și (8), relația (6) devine:

$$||AA_1||^2 = a^2 + c^2 + (b^2 - c^2 - a^2) : 2 + 2S\sqrt{3}.$$

Suma minimă va fi:

$$||TA|| + ||TB|| + ||TC|| = ||AA_1|| = ||BB_1|| = ||CC_1|| =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3})^{1/2}.$$

Observații: — Dacă unghiul $\widehat{A} < 120°$, punctul T se află în interiorul triunghiului ABC;

---

[1] Torricelli Evangelista (1608—1647), a fost elevul preferat al lui Galileo Galilei (1564—1642).

Scanned with OKEN Scanner

— Dacă unghiul $\widehat{A} = 120°$, punctul T coincide cu vîrful A. În acest caz $||TA|| + ||TB|| + ||TC|| = ||AB|| + ||AC|| = b + c$.

— Dacă unghiul $\widehat{A} > 120°$, punctul T este exterior triunghiului, dar suma $||TA|| + ||TB|| + ||TC||$ nu mai este minimă. În acest caz suma minimă se obține atunci cînd T coincide cu A.

$$||TA|| + ||TB|| + ||TC|| = b + c.$$

— În cazul $\widehat{A} < 120°$; din punctul T laturile triunghiului se văd sub un unghi de 120°.

— Se poate arăta că $\triangle O_1O_2O_3$ care unește centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale ABC_1, BCA_1, CAB_1 este tot echilateral[1]

$$||O_1O_2|| = ||O_2O_3|| = ||O_3O_1|| = \frac{\sqrt{6}}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3})^{1/2}.$$

Triunghiul echilateral $O_1O_2O_3$ poartă numele de „triunghiul exterior al lui Napoleon".

În mod analog $\triangle O_1'O_2'O_3'$ care unește centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale ABC_1', BCA_1', CAB_1' construite în interiorul triunghiului dat ABC este tot echilateral și poartă numele de „triunghiul interior al lui Napoleon".

$$||O_1'O_2'|| = ||O_2'O_3'|| = ||O_3'O_1'|| = \frac{\sqrt{6}}{6}(a^2 + b^2 + c^2 - 4S\sqrt{3})^{1/2}.$$

Probleme propuse

1. Dintr-o bară metalică de formă cilindrică trebuie să construim bare paralelipipedice. Se cer dimensiunile dreptunghiului de secțiune, astfel încît pierderea de material să fie minimă.

R. Dacă x, y sînt dimensiunile dreptunghiului, pierderea de material va fi minimă atunci cînd aria $S = xy$ va fi maximă.

Cum max S se va realiza odată cu max $S^2 = x^2y^2$, se va găsi $x = y = R\sqrt{2}$, $S = 2R^2$. Barele trebuie să aibă secțiunea un pătrat.

2. Două orașe A și B sînt situate la 10 km și respectiv 15 km de un rîu rectiliniu, iar proiecția segmentului $|AB|$ pe direcția rîului este de 20 km. Cele două orașe trebuie alimentate cu apă de la o uzină care urmează să fie construită pe marginea rîului.

Se cere poziția de amplasare a uzinei, astfel încît costul conductelor care leagă cele două orașe cu uzina să fie minim.

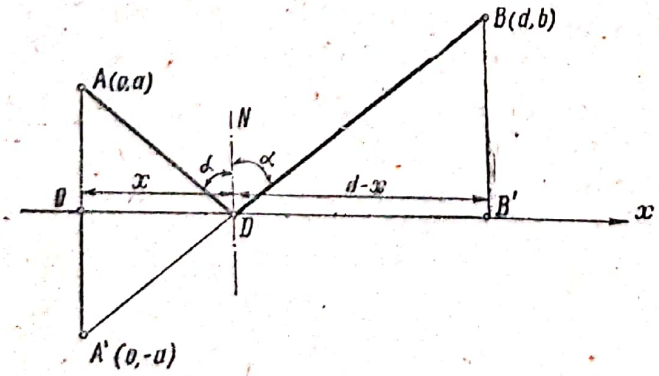


Fig. 25.

R. Folosind datele din figura 25 se constată că $\min(||AD|| + ||DB||) = \min(||A'D|| + ||DB||)$. Cum $\triangle OAD \sim \triangle BCD$ se va găsi: $x = ad : (a + b)$.

[1] Se recomandă [13] și [20].

În exemplul dat $x = 10 \cdot 20 : (10 + 15) = 200 : 25 = 8$ km.

3. De-a lungul unei şosele rectilinii se află două şantiere de construcţii A şi B. La distanţele c şi d de şosea se află alte două şantiere C şi D.

Se cere poziţia M de amplasare a unui depozit de materiale, astfel încît suma distanţelor lui la cele patru şantiere A, B, C, D să fie minimă ştiind că:

$$||AB|| = a = 800 \text{ m};$$
$$||CC'|| = 500 \text{ m};$$
$$||DD'|| = d = 300 \text{ m};$$
$$||C'D'|| = b = 600 \text{ m}.$$

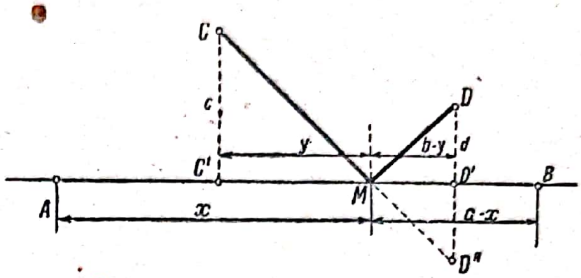


Fig. 26.

R. Funcţia al cărei minim se cere este $L = x + a - x + ||MC|| + ||MD|| = a + ||MC|| + ||MD''||$ (fig. 26). Se va găsi: $\min L = a + \sqrt{b^2 + (c + d)^2} = 1800$ m; $y = bc : (c + d) = 375$ m.

4. O bară de lungime dată are secţiunea unui dreptunghi de arie constantă. Această bară trebuie prelucrată pe toate feţele şi apoi nichelată.

Se cer dimensiunile secţiunii, astfel încît costul celor două operaţii (frezare şi nichelare) să fie minim.

R. Costul este proporţional cu perimetrul secţiunii: $C = 2c(x + y)l$; unde l este lungimea barei, c costul pe unitate de suprafaţă, iar x şi y dimensiunile dreptunghiului.

Va trebui să găsim minimul funcţiei $C = k(x + y)$ ştiind că $xy = S =$ constant. Se va găsi $x = y = \sqrt{S}$; $\min C = 2cl\sqrt{S}$. Se va folosi teorema de minim T_1 (cazul particular $p = 1$; $n = 2$).

5. Dintre toate conurile cu volum dat, se cere acela pentru care suma razei şi înălţimii este minimă.

R. Dacă notăm cu x, y, V, raza, înălţimea şi volumul conului, se cere $\min (x + y)$ ştiind că $V = \pi x^2 y : 3$; $x^2 y = c = 3V : \pi$.

În baza teoremei de minim T_3 (cazul particular $m = 2$, $n = 1$), minimul are loc cînd $x = 2y = \sqrt[3]{c : 4}$; $\min (x + y) = 3\sqrt[3]{3V : 4\pi}$.

6. Uneori, vopselele se vînd în cutii de tablă cilindrice cu o capacitate de $v = 250$ cm³. Ele au o deschidere circulară, care se închide cu un capac din material plastic.

Raportul dintre diametrul acestei deschideri şi diametrul cutiei este 4 : 5. Se cer dimensiunile cutiei, astfel încît costul tablei necesare confecţionării ei să fie minim

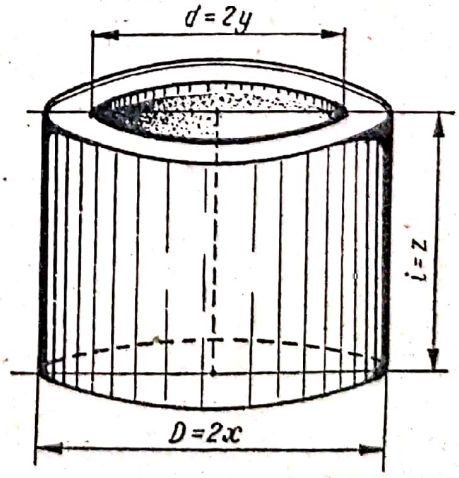


Fig. 27.

R. Folosind notaţiile din fig. 27, funcţia a cărei minim se cere este $f = 2\pi xz + \pi x^2 + \pi(x^2 - y^2)$, astfel ca $y = 4x : 5$; $\pi x^2 z = 250$. Se va găsi $f = 2\pi\ (250 : \pi x + 17x^2 : 25)$. Cum $\left(\frac{250}{\pi x}\right)^2 \cdot \left(\frac{17x^2}{25}\right) = \frac{17 \cdot 2500}{\pi^2} =$ = constant, în baza teoremei de minim T_3

(cazul particular $m = 2$, $n = 1$), f va fi minimă dacă $\frac{250}{\pi x} = \frac{2 \cdot 17x^2}{25}$. Se va găsi $x = \sqrt[3]{6250 : 34\pi} = 3{,}88$ cm ; $D = 7{,}76$ cm ; $d = 6{,}20$ cm ; $i = 5{,}28$ cm ; min $f = 0{,}0192\, c$, unde c este costul unui metru pătrat de tablă.

7. Se cere să se determine dimensiunile unei cutii paralelipipedice fără capac confecționată din tablă, de volum dat V (aplicație $V = 125$ dm^3)

R. Dacă x, y, z sînt dimensiunile cutiei, se cere minimul sumei $S = xy + 2xz + 2yz$ știind că $xyz = V =$ constant.

Cum $4V^2 = 4x^2y^2z^2 = (xy)(2xz)(2yz) =$ constant, în baza teoremei de minim T_1 (cazul particular $p = 1$, $n = 3$) suma S este minimă dacă $x = y = \sqrt[3]{2V} = 5\sqrt[3]{2}$; $z = \sqrt[3]{V : 4} = 5 : \sqrt[3]{4}$; minim $S = 3\sqrt[3]{4 \cdot V^2} = 75\sqrt[3]{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III.

CALCULUL VARIAȚIEI PROCENTUALE A UNEI SUME, PRODUS SAU CÎT DE DOUĂ SAU MAI MULTE MĂRIMI VARIABILE

Marea majoritate a indicatorilor tehnico-economici folosiți în planificarea și analiza activității întreprinderilor sînt legați între ei prin relații simple, care conțin în expresia lor numai operații elementare.

Fiecare din acești indicatori cresc sau descresc față de valoarea lor planificată sau față de valorile realizate într-o perioadă oarecare de timp, cu procente pe care statistica ni le pune la dispoziție, lunar, trimestrial și anual (mărimea unor indicatori de importanță deosebită este cunoscută decadal, săptămînal, sau chiar zilnic).

De aceea este important de știut cum se calculează procentul de variație a unui indicator în funcție de variația procentuală a altor indicatori între care avem stabilite una din relațiile simple sub formă de sume, produs sau cît:

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n; \quad x = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n; \quad x = \frac{x_1}{x_2}.$$

§ 1. Variația procentuală a unei sume de două sau mai multe mărimi variabile

Fie:

$$x = x_1 + x_2 \tag{1}$$

suma a două mărimi variabile independente una de alta. Dacă x_1 și x_2 variază cu procentele p_1 și p_2, iar x cu procentul p, se poate scrie:

$$x + \frac{p}{100}x = \left(x_1 + \frac{p_1}{100}x_1\right) + \left(x_2 + \frac{p_2}{100}x_2\right). \tag{2}$$

Din (1) și (2) prin scădere se obține:

$$p = \frac{p_1x_1 + p_2x_2}{x_1 + x_2}. \tag{3}$$

Formula (3) dă procentul p de variație a lui x, cînd fiecare din mărimile x_1, x_2 variază cu procentele p_1, p_2.

Scanned with OKEN Scanner

Generalizare. Dacă mărimea x este o sumă de n mărimi variabile:

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

iar $p_1, p_2, \ldots, p_n, p$ procentele de variaţie respective:

$$x + \frac{p}{100}x = \left(x_1 + \frac{p_1}{100}x_1\right) + \left(x_2 + \frac{p_2}{100}x_2\right) + \ldots + \left(x_n + \frac{p_n}{100}x_n\right)$$

se obţine:

$$p = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i : \sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (4)$$

Exemplu. Unui şantier de construcţii i s-au prevăzut în plan, în cursul unei luni următoarele elemente de cheltuieli, care au fost depăşite după cum urmează:

Nr. crt.	Natura cheltuielilor	Planificat (lei)	Depăşiri %
1	Retribuţii	52 000	4
2	Materiale	40 000	12
3	Combustibil	24 000	8
4	Alte cheltuieli	32 000	0
	TOTAL	148 000	$p = ?$

Cu ce procent a fost depăşit totalul cheltuielilor faţă de plan?
Folosind formula (4), se obţine:

$$p = \frac{4 \cdot 52 \cdot 10^3 + 12 \cdot 40 \cdot 10^3 + 8 \cdot 24 \cdot 10^3}{52 \cdot 10^3 + 40 \cdot 10^3 + 24 \cdot 10^3 + 32 \cdot 10^3} = \frac{880}{148} = 5{,}94\%.$$

§ 2. Variaţia procentuală a unui produs de două mărimi variabile

Fie x_1 şi x_2 două mărimi variabile independente una de alta şi x produsul lor:

$$x = x_1 \cdot x_2. \qquad (5)$$

Dacă notăm cu p, p_1, p_2 procentele de variaţie ale lui x, x_1, x_2, atunci:

$$x + \frac{p}{100}x = \left(x_1 + \frac{p_1}{100}x_1\right) \cdot \left(x_2 + \frac{p_2}{100}x_2\right). \qquad (6)$$

Scăzînd pe (5) din (6) obţinem:

$$p = p_1 + p_2 + \frac{p_1 \cdot p_2}{100}. \qquad (7)$$

Formula (7) ne dă procentul p de variaţie al lui x, cînd x_1 şi x_2 variază cu procentele p_1 respectiv p_2.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. La un depou de locomotive, consumul specific de combustibil (c) s-a redus în cursul unei luni cu 12% față de plan, iar numărul de tone brute remorcate (T) a crescut cu 10%.

Care este procentul p de variație a cantității de combustibil C față de plan?

Se știe că între C, c și T există relația $C = c \cdot T$.

Cum procentele de variație ale lui c și T sînt $p_1 = -12$; $p_2 = 10$, formula (7) ne dă:

$$p = -12 + 10 - \frac{10 \cdot 12}{100} = -3{,}2\%.$$

Deci, cantitatea de combustibil consumat la acel depou în luna respectivă s-a redus cu 3,2% față de plan și au fost necesare numai 3 operații.

Observație. Dacă am rezolva problema calculînd mai întîi valoarea planificată și realizată a indicatorilor, ar fi fost necesare 11 operații elementare.

§ 3. Variația procentuală a unui produs de n mărimi variabile

Fie

$$x = x_1 \cdot x_2 \ldots x_n, \tag{8}$$

produsul a n mărimi variabile independente una de alta.

Dacă notăm cu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ și p, procentele de variație ale lui $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și x, vom putea scrie:

$$x + \frac{p}{100}x = \left(x_1 + \frac{p_1}{100}x_1\right) \cdot \left(x_2 + \frac{p_2}{100}x_2\right) \ldots \left(x_n + \frac{p_n}{100}x_n\right). \tag{9}$$

Împărțind pe (9) la (8) și efectuînd calculele găsim:

$$p = \left[\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)\left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \ldots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right) - 1\right] \cdot 100. \tag{10}$$

Sau, dacă notăm cu $c_i = (1 + p_i : 100)$; $i = 1, 2, \ldots, n$, coeficienții de variație ale mărimilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și cu c coeficientul de variație al produsului x, atunci (10) devine

$$c = (c_1 \cdot c_2 \ldots c_n - 1). \tag{10'}$$

Formula (10) ne dă procentul, (iar (10') coeficientul) de variație a unui produs de n mărimi variabile în funcție de procentele (respectiv coeficienții) de variație ale acestora.

Exemplu. Se știe că fondul de retribuții reprezintă suma tuturor fondurilor bănești care se cuvin lucrătorilor unei întreprinderi pentru munca depusă. Prin drepturi bănești se înțeleg sumele încasate de un lucrător sub diferite forme: retribuția, acordul simplu sau acordul progresiv (dacă lucrează în acord), plata orelor suplimentare, premiile, indemnizațiile de vechime, sporul pentru munci efectuate în condiții speciale etc.

Scanned with OKEN Scanner

Fondul de retribuție depinde de următorii indicatori:

A_1 = costul unei ore-muncă, exprimat în lei/oră;
A_2 = timpul necesar pentru efectuarea unui produs, măsurat în ore/bucată;
A_3 = productivitatea muncii, exprimată în bucăți/om zi;
A_4 = numărul de oameni zile efectuate în perioada de timp considerată; de exemplu oameni-zile pe lună.

Se constată că, fondul de retribuție F care se exprimă în lei/lună este egal cu produsul celor 4 indicatori A_1, A_2, A_3, A_4.

$$F\left(\frac{\text{lei}}{\text{lună}}\right) = A_1\left(\frac{\text{lei}}{\text{oră}}\right) \cdot A_2\left(\frac{\text{ore}}{\text{bucată}}\right) \cdot A_3\left(\frac{\text{bucăți}}{\text{om} \cdot \text{zi}}\right) \; A_4\left(\frac{\text{oameni} \cdot \text{zile}}{\text{lună}}\right),$$

deci:

$$F = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4.$$

Aplicație. La o întreprindere se constată că cei 4 indicatori A_1, A_2 A_3, A_4 au variat în cursul unei luni față de plan cu procentele:

$$p_1 = 10\%\,;\; p_2 = -5\%\,;\; p_3 = 15\%\,;\; p_4 = 8\%.$$

Care este procentul de variație a fondului de retribuții față de plan, în cursul acelei luni?

Deoarece fondul de retribuții este produsul a 4 factori, procentul de variație al acestui produs se va calcula cu formula (10), pentru $n = 4$:

$$p = \left[\left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right) - 1\right] \cdot 100 =$$

$$= (1{,}10 \cdot 0{,}95 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}08 - 1) \cdot 100 = (1{,}298 - 1) \cdot 100 =$$

$$= 0{,}298 \cdot 100 = 29{,}8\%.$$

Fondul de retribuții a fost depășit cu 29,8% față de plan.

§ 4. Variația procentuală a unui cît de două mărimi variabile

Fie x_1, x_2 două mărimi variabile independente una de alta și x cîtul lor:

$$x = \frac{x_1}{x_2}. \tag{11}$$

Dacă notăm cu p_1, p_2, p procentele de variație ale lui x_1, x_2 și x, vom putea scrie:

$$x + px : 100 = \frac{x_1 + p_1 x_1 : 100}{x_2 + p_2 x_2 : 100}. \tag{12}$$

Împărțind pe (12) la (11) și efectuînd calculele găsim:

$$p = \frac{100(p_1 - p_2)}{100 + p_2}. \tag{13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu: Planul de cheltuieli la o întreprindere de confecţii a fost în cursul unei luni de 90 000 lei pentru confecţionarea a 450 rochii. La sfîrşitul lunii s-a constatat că producţia a fost depăşită cu 20%, iar cheltuielile[1] numai cu 8%.

Care este procentul de variaţie al preţului de cost?

Soluţie. Cum preţul de cost c este raportul dintre totalul cheltuielilor C şi producţia P,

$$c = C : P,$$

iar C şi P au crescut cu 8%, respectiv 20%, procentul de variaţie p al cîtului va fi dat de formula (13), în care $p_1 = 8$ şi $p_2 = 20$:

$$p = \frac{100(8 - 20)}{100 + 20} = \frac{-1200}{120} = -10\%.$$

Deci, preţul de cost a fost redus cu 10% faţă de plan.

Observaţii. Fără a folosi formula (13), problema se putea rezolva calculînd separat cheltuielile realizate C_R, preţul de cost planificat c_P, producţia realizată P_R şi apoi preţul de cost realizat c_R; iar procentul de variaţie a preţului de cost faţă de plan va fi:

$$p = 100\left(\frac{c_R}{c_P} - 1\right) = -10\%.$$

Dar în acest caz sînt necesare 12 operaţii elementare în loc de 4 cît necesită formula (13).

— Dacă numărătorul se menţine constant şi variază numai numitorul, adică $p_1 = 0$, procentul de variaţie al cîtului va fi:

$$p = -\frac{100p_2}{100 + p_2}. \qquad (14)$$

§ 5. Variaţia procentuală a unui cît de produse a mai multor mărimi variabile

Fie:

$$z = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m}{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n} \qquad (15)$$

cîtul dintre produsul $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m$ şi $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n$; a $m + n$ mărimi variabile independente una de alta.

---

[1] Acest lucru este posibil prin creşterea productivităţii muncii şi prin faptul că o parte din cheltuielile unei întreprinderi (de exemplu cheltuielile de regie) au un caracter constant faţă de plan; ele nu depind de variaţia producţiei.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm cu $p_1, p_2, \ldots, p_m$, procentele de variație ale lui $x_1, x_2, \ldots, x_m$ și cu $q_1, q_2, \ldots, q_n$ procentele de variație ale lui $y_1, y_2, \ldots, y_n$; procentul r de variație a lui z, va fi dat de formula:

$$r = \left[\frac{\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdots \left(1 + \frac{p_m}{100}\right)}{\left(1 + \frac{q_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{q_2}{100}\right) \cdots \left(1 + \frac{q_n}{100}\right)} - 1 \right] \cdot 100. \qquad (16)$$

Observații. Formula (16) conține următoarele cazuri particulare tratate anterior:

— pentru $m = 2$, $n = 0$, se obține formula (7);
— pentru $m = m$, $n = 0$, se obține formula (10);
— pentru $m = 1$, $n = 1$, se obține formula (13).
— pentru $m = 0$, $n = 1$, se obține formula (14).

Probleme propuse

1. La o întreprindere de confecții, prețul de cost planificat c_p a fost de 124 lei/bucată. Producția planificată a fost de 4 500 bucăți ($P_p = 4500$). Se știe că prețul de cost s-a realizat cu o reducere de 8% față de plan ($p_1 = -8$), iar producția s-a realizat cu o depășire de 15% ($p_2 = 15$).

Cu ce procent (p) a variat totalul cheltuielile (C_p) la acea întreprindere?

R. Cum $C_p = c_p \cdot P_p$, se va aplica formula (7), se va găsi $p = 5{,}8\%$.

2. La un atelier de confecționat piese de schimb pentru tractoare s-a constatat la sfîrșitul unei luni că, deși s-a lucrat cu 10% mai puțini muncitori față de cei prevăzuți în plan, producția s-a realizat conform planului, ca urmare a creșterii productivității muncii.

Cu cît a crescut productivitatea muncii la acea întreprindere?

R. Productivitatea muncii P_m este raportul dintre producția P și numărul N de oameni-zile[1] efectuate pentru realizarea acestei producții: $P_m = P : N$. Se va folosi formula (14); $p = 11{,}11\%$.

3. La o întreprindere s-a prevăzut ca în decurs de 6 ani productivitatea muncii să crească cu 60%. Să se determine procentul de creștere a numărului de muncitori de la acea întreprindere, pentru ca producția să fie depășită în decursul acestor 6 ani cu 70%.

R. Dacă notăm cu P producția, cu P_m — productivitatea muncii, iar cu N — numărul de muncitori, atunci $N = P : P_m$.

Dacă ținem seama de procentele de variație ale lui P și P_m, formula (13) ne va da $p = 6{,}25\%$.

4. Se cere procentul (p) de variație a cheltuielilor într-un sector industrial în care s-a prevăzut ca în decurs de 6 ani prețul de cost să fie redus cu 15%, iar producția să crească cu 70%.

---

[1] Numărul de oameni-zile se obține cu formula $N = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot z_i$, dacă în luna respectivă (sau în perioada de timp analizată) au fost k zile lucrătoare, n_i reprezintă numărul de lucrători care au lucrat cîte z_i zile. Exemplu: dacă 200 lucrători au lucrat cîte 18 zile, iar 30 numai cîte 8 zile $N = 200 \cdot 18 + 30 \cdot 8 = 3840$ oameni-zile.

Scanned with OKEN Scanner

R. Dacă notăm cu C, P și c cheltuielile, producția și prețul de cost, $C = P \cdot c$; se va găsi $p = 44{,}5\%$.

5. Să se calculeze procentul de variație a prețului de cost în decurs de 5 ani, știind că producția crește în această perioadă cu 70% iar cheltuielile cresc numai cu 19%.

R. Se va folosi formula (13). Se va găsi $p = -30\%$. Prețul de cost se va reduce cu 30% față de plan.

6. La 3 ateliere de zonă de pe cuprinsul unei regionale *C.F.R.* s-au planificat și s-au realizat următoarele reparații la vagoanele de marfă:

Denumirea atelierului	Vagoane planificate pentru reparat	Procentul de depășire față de plan
A_1	200	12
A_2	140	4
A_3	85	6

Se cere procentul de depășire a numărului de vagoane reparate la acea regională *C.F.R.* față de plan.

R. Folosind formula (4) pentru $n = 3$ se va găsi $p = 8{,}14\%$.

7. Cheltuielile necesare pentru consumul de energie electrică variază direct proporțional cu următorii indicatori:

c = prețul de cost al unui kilowatoră, exprimat în lei/kwh;

s = consumul specific de energie electrică, măsurat în kwh/mașini-oră;

n = numărul mediu al orelor de funcționare a unei mașini în perioada de timp analizată[1], exprimată în ore;

m = numărul total de mașini[2] care au funcționat în aceă perioadă.

Cheltuielile necesare (C) pentru consumul de energie electrică, se vor putea exprima în funcție de acești 4 indicatori sub forma:

$$C(\text{lei}) = c\left(\frac{\text{lei}}{\text{kwh}}\right) \cdot s\left(\frac{\text{kwh}}{\text{mașini-ore}}\right) \cdot n\left(\frac{\text{mașini-ore}}{\text{mașini}}\right) \cdot m\ (\text{mașini}).$$

Deci:

$$C = c \cdot s \cdot n \cdot m.$$

Dacă procentele de variație ale lui c, s, n, m au fost: 2%, −4%, 6%, 5%, se cere procentul de variație al cheltuielilor.

R. Fomula (10) ne va da: $p = 9\%$.

---

[1] Mărimea acestui indicator se obține însumînd numărul de ore de funcționare a tuturor mașinilor care au lucrat în perioada respectivă și împărțind rezultatul la numărul mașinilor $n = (\Sigma h_i m_i) : \Sigma m_i$, în care $h_1, h_2, \ldots, h_n$ reprezintă numărul de ore lucrate de cele $m_1, m_2, \ldots \ldots, m_n$ mașini.

[2] $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

Scanned with OKEN Scanner

8. Producţia unei întreprinderi industriale depinde de următorii indicatori:

n = norma de manoperă, care reprezintă cantitatea de produse obţinută în unitate de timp (bucăţi/oră);

t = timpul mediu de lucru al unui muncitor pe zi (exprimat în ore/om zi);

N = numărul mediu de muncitori care au lucrat pe zi în perioada analizată, exprimat în oameni-zile/zi $= \Sigma(N_k \cdot Z_k) : (\Sigma Z_k)$, unde N_k reprezintă numărul de muncitori care au lucrat cîte Z_k zile;

Z = numărul de zile lucrătoare din perioada considerată (de exemplu, într-o lună $Z = 26$ zile/lună; într-un an $Z = 300$ zile/an).

Să se exprime producţia P (bucăţi/lună) în funcţie de aceşti 4 indicatori.

Ştiind că indicatorii n, t, N au variat faţă de plan cu procentele $p_1 = 10\%$, $p_2 = 5\%$ $p_3 = -5\%$, iar Z a rămas constant, se cere procentul p de variaţie al producţiei faţă de plan.

R. $P = n \cdot t \cdot N \cdot Z$; se va găsi $p = 9{,}72\%$.

9. Producţia în traficul de călători la căile ferate, C_k care se exprimă în călători-km[1] depinde de următorii indicatori, faţă de care variază direct proporţional:

c_1 = *coeficientul de utilizare a locurilor;* este egal cu raportul dintre numărul de călători şi numărul de locuri (dacă $c_1 = 1$, toate locurile sînt ocupate, dacă $c_1 = 0$, toate locurile au fost libere[2] etc.) şi se exprimă în călători/loc. În general $0 \leqslant c_1 \leqslant 1$;

c_2 = *capacitatea vagonului,* care reprezintă numărul mediu de locuri ce revin pe o osie a vagonului de călători şi este raportul dintre numărul de locuri şi numărul de osii ale vagonului (de exemplu dacă un vagon pe 4 osii are 72 de locuri, $c_2 = 72 : 4 = 18$) şi se exprimă în locuri/osie;

c_3 = *compunerea în osii a unui tren,* este numărul mediu de osii din compunerea unui tren; se obţine ca raport dintre numărul de osii şi numărul de trenuri şi se exprimă în osii/tren;

c_4 = *distanţa medie parcursă de un tren de călători* în cursul perioadei analizate, se exprimă în km şi se calculează cu formula $c_4 = \Sigma t_i d_i) : \Sigma t_i$, în care t_i reprezintă numărul de trenuri ce au parcurs distanţa a_i;

c_5 = *numărul de trenuri expediate,* adică numărul de trenuri ce au circulat în perioada analizată $c_5 = \Sigma t_i$.

Să se exprime producţia C_k (călători · km) în funcţie de cei cinci indicatori $c_1, \ldots, c_5$.

Ştiind că în cursul unei luni, aceşti indicatori au variat cu procentele: $p_1 = 5\%$; $p_2 = 12\%$, $p_3 = 10\%$; $p_4 = -4\%$; $p_5 = 8\%$, se întreabă cu ce procent a variat producţia în traficul de călători faţă de plan.

R. $C_k = c_1$ (călători/loc) $\cdot\ c_2$ (locuri/osie) $\cdot\ c_3$ (osii/tren) $\cdot\ c_4$(km) $\cdot\ c_5$ (trenuri) $= c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_4 \cdot c_5$ călători·km. Se va găsi $p = 34\%$.

---

[1] Mărimea acestui indicator se obţine cu formula $C_k = \Sigma N_i D_i$, în care N_i reprezintă numărul de călători care au parcurs distanţa D_i.

[2] Dacă $c_1 = 2$; 50% din pasageri călătoresc pe locuri şi 50% în picioare, $c_1 = 2$ reprezintă un coeficient de aglomeraţie maxim.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV.

REPREZENTĂRI GRAFICE

Importanţa reprezentărilor grafice este bine cunoscută. Prin grafic putem urmări evoluţia unui fenomen în funcţie de cauza care-l produce. În acelaşi timp, studiind dependenţa fenomenului în funcţie de factorii de care depinde, vom putea lua măsuri pentru a provoca fenomene favorabile utile vieţii sociale şi a elimina acele cauze care provoacă fenomene neplăcute.

Pentru a ilustra cele spuse, vom da cîteva exemple cu aspecte din viaţa economică.

1. *Variaţia preţului de cost în funcţie de variaţia producţiei*

Realizarea planului de producţie la orice întreprindere este condiţionată de un consum de:

— forţă de muncă necesară realizării produsului şi care se reflectă în fondul de retribuţie;

— materii prime şi materiale care intră în produsul finit şi transmit acestuia integral costul lor;

— combustibili şi lubrifianţi, energie electrică, apă, abur, aer comprimat, oxigen, acetilenă, precum şi alte materii prime sau materiale auxiliare care se consumă direct sau indirect în timpul şi din cauza procesului de producţie, nu rămîn în produsul obţinut, dar transmit acestuia costul lor integral.

— maşini unelte, maşini de forţă, de ridicat, de transportat, clădiri sau alte instalaţii fixe; în general, tot felul de utilaje care servesc în mod direct sau indirect la realizarea producţiei[1].

Acestea se consumă numai parţial în timpul unui ciclu de producţie (adică în timpul realizării unităţii de produs) şi transmit produsului numai o mică parte din valoarea lor.

Acea parte din valoarea mijloacelor fixe care se transferă produsului reprezintă uzura şi intră în costul produsului prin cota de amortizare.

Totalul cheltuielilor necesare realizării planului de producţie se compun din următoarele *elemente de cheltuieli:* fondul de retribuţie (inclusiv accesoriile), materii prime şi materiale, combustibil, energie electrică, apă, abur, aer comprimat, amortismentul şi cheltuieli diverse.

La rîndul lor, aceste cheltuieli se împart în:

— cheltuieli direct proporţionale cu producţia, cunoscute sub numele de *cheltuieli variabile* (C_v), care se compun din retribuţie şi materiale direct productive;

---

[1] Toate aceste utilaje poartă numele de mijloace fixe sau mijloace de bază.

Scanned with OKEN Scanner

— cheltuieli care se menţin constante cînd producţia creşte (sau scade), adică se menţin egale cu valoarea lor planificată.

Aceste cheltuieli, cunoscute sub numele de *cheltuieli convenţional constante* (C_c), sau cheltuieli fixe, se compun în general din cheltuieli de regie: întreţinerea şi reparaţia clădirilor administraţiei, încălzirea, iluminarea şi alimentarea lor cu apă, plata telefoanelor şi rechizitelor de birou etc., plata retribuţiilor cadrelor administrative, de pază şi de serviciu etc.

Preţul de cost reprezintă totalitatea muncii omeneşti sub diferitele ei aspecte, care a fost depusă în trecut, (munca materializată) şi aceea dezvoltată în prezent (munca vie) în diferite faze ale procesului de producţie, consumată la o întreprindere pentru obţinerea unei producţii şi se exprimă în lei pe unitate de produs.

Preţul de cost (c) va fi deci raportul dintre totalul cheltuielilor (C_t) şi producţie (P):

$$c = \frac{C_t}{P}; \qquad (1)$$

— producţia P se poate exprima în unităţi fizice caracteristice: m, m², m³, kg, t, kwh, bucăţi etc. sau în unităţi convenţionale;

— totalul cheltuielilor C_t necesare pentru realizarea producţiei este dat în lei;

— preţul de cost c se exprimă în lei/unitate de produs (lei/m, lei/kg, lei/bucată, lei/t etc.).

Cum cheltuielile totale se împart în mod natural în cheltuieli variabile (C_v) şi convenţional constante (C_c), vom putea scrie preţul de cost sub forma:

$$c = \frac{C_v + C_c}{P}. \qquad (2)$$

Problema care se pune este de a determina procentul de variaţie ($y\%$) a preţului de cost (c) cînd producţia (P) variază cu $x\%$.

Dacă producţia variază cu $x\%$ devine:

$$P + \frac{x}{100} P = P\left(1 + \frac{x}{100}\right).$$

Cheltuielile constante rămîn egale cu C_c.

Cheltuielile variabile (C_v) variază cu acelaşi procent ca şi producţia de $x\%$ şi devin:

$$C_v + \frac{x}{100} C_v = C_v\left(1 + \frac{x}{100}\right).$$

Preţul de cost variază cu procentul de $y\%$ şi devine:

$$c + \frac{y}{100} c = c\left(1 + \frac{y}{100}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă ţinem seama de relaţia (2), vom putea scrie :

$$c + \frac{y}{100}\,c = \frac{C_c + C_v\left(1 + \frac{x}{100}\right)}{P\left(1 + \frac{x}{100}\right)}. \qquad (3)$$

Scăzînd pe (2) din (3) şi efectuînd calculele, obţinem :

$$y = -\frac{100ax}{100 + x}, \qquad (4)$$

unde parametrul $a = C_c : C_t$ reprezintă greutatea specifică a cheltuielilor fixe faţă de totalul cheltuielilor. Cum $C_c > 0$ şi în acelaşi timp $C_c < C_t$, rezultă că $a \in (0,1)$.

Observaţie: $C_c \neq 0$, deoarece nu pot exista întreprinderi care să aibă toate cheltuielile variabile; de asemenea $C_c < C_t$, deoarece nu pot exista întreprinderi la care toate cheltuielile să fie fixe.

Valoarea parametrului a este caracteristică fiecărei întreprinderi şi depinde de natura ei. Astfel, în transportul feroviar $a \approx 0{,}6$; la departamentul minelor şi petrolului $a \approx 0{,}4$ în industria alimentară $a \approx 0{,}16$ (cheltuielile fixe sînt foarte mici, reprezintă numai 16% din totalul cheltuielilor) etc.

Formula (4) este generală şi este folosită la analiza preţului de cost la orice întreprindere.

Graficul funcţiei (4). Pentru a putea urmări modul de variaţie a preţului de cost în funcţie de variaţia producţiei, vom reprezenta grafic funcţia (4) pentru cazul concret în care $a = 0{,}5$:

$$y = -\frac{50x}{100 + x}. \qquad (5)$$

Domeniul maxim de definiţie al funcţiei (5) este mulţimea $x \in R - \{-100\}$. Dacă ţinem însă seama de semnificaţia practică a lui x, se constată că x trebuie să fie mai mare decît -100. Dacă $x = -100$, producţia scade cu 100% şi devine zero, ceea ce practic nu se întîmplă niciodată.

De asemenea, producţia nu poate creşte decît între anumite limite într-o perioadă dată (lunar, trimestrial sau anual).

Vom considera $x \leqslant 100$, adică producţia poate fi depăşită cel mult cu 100% faţă de plan.

În aceste condiţii, procentul practic de variaţie a producţiei va fi cuprins între -100 şi $+100$, $x \in (-100, 100]$.

Curba trece prin origine (pentru $x = 0$, $y = 0$) şi admite asimptota $x = -100$. Prima derivată a funcţiei este :

$$y' = -\frac{5000}{(100 + x)^2} < 0,$$

deci funcţia este strict descrescătoare pe domeniul ei practic de definiţie.

Scanned with OKEN Scanner

Folosind datele din tabela de mai jos:

x	-100		-50		-25		0		25		50		100
y	$+\infty$	$\searrow$	50	$\searrow$	$50/3$	$\searrow$	0	$\searrow$	-10	$\searrow$	$-50/3$	$\searrow$	-25
y'	$-\infty$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$

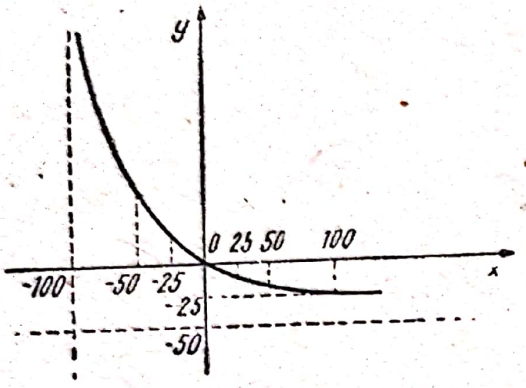


Fig. 28.

se obţine graficul din figura 28.

Observaţii: — Dacă facem translaţia de axe $x = X - 100$, $y = Y - 100 \cdot a$ şi notăm $10^4 a = K$, se obţine hiperbola echilaterală $XY = K$.

— Variaţia procentuală a preţului de cost se face după o hiperbolă în funcţie de procentul de variaţie a producţiei.

— Preţul de cost scade odată cu creşterea producţiei şi creşte odată cu nerealizarea planului de producţie. Această scădere (respectiv creştere) este cu atît mai pronunţată cu cît cheltuielile convenţional constante reprezintă un procent cît mai mare din totalul cheltuielilor acelei întreprinderi, deci cu cît parametrul a are valori cît mai apropiate de 1.

Dacă acest grafic este întocmit la o scară convenabilă (de exemplu 0,1% = 1 mm), atunci fiecărui procent de variaţie a producţiei $x = x_1\%$ îi va corespunde un procent de variaţie a preţului de cost $y = y_1\%$, care se va putea obţine direct din grafic prin simpla măsurare a ordonatei punctului de abscisă $x = x_1$.

— Dacă producţia variază cu procente egale în valoare absolută, dar de semne contrare ($x = \pm x_1$), atunci preţul de cost variază cu procente diferite.

Astfel, dacă producţia creşte cu 50% ($x_1 = 50$), preţul de cost scade cu 50/3% = 16,66% ($y_1 = -50/3$).

Dacă însă producţia scade cu 50%, adică se realizează cu 50% sub plan ($x_1 = -50$), preţul de cost creşte cu 50% ($y_1 = 50$), deci creşte de trei ori mai mult decît a scăzut în cazul depăşirii planului de producţie cu acelaşi procent de 50%.

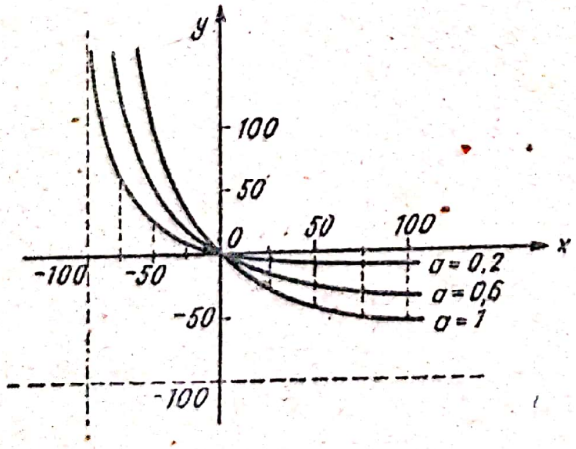


Fig. 29.

— Funcţia (4) reprezintă un fascicul de hiperbole, deoarece parametrul „a" poate lua o infinitate de valori cuprinse între 0 şi 1.

Cum pentru $a = 0$, avem $y = 0$ (axa (Ox)), iar pentru $a = 1$,

$$y = -100\,x : (100 + x), \qquad (6)$$

fasciculul de hiperbole va fi cuprins între axa Ox şi hiperbola (6). În figura 29 se pot vedea cîteva hi-

Scanned with OKEN Scanner

perbole care fac parte din acest fascicul, corespunzătoare lui $a = 0$; 0,2; 0,6; 1.

2. *Variația procentuală a productivității muncii.*

Productivitatea muncii Q reprezintă valoarea raportului dintre producția P și timpul[1] total T_t, folosit pentru a obține acea producție:

$$Q = \frac{P}{T_t}. \tag{7}$$

Productivitatea muncii se exprimă în unități de producție pe unitate de timp (bucăți/om—zi; m^2/om-oră; tone/om-zi etc.).

Lucrătorii se împart în două categorii: direct productivi N_v, al căror număr variază direct proporțional cu producția și auxiliari N_a, al căror număr se menține constant cînd producția variază[2]. Deci: $T_t = T_a + T_v$, și formula (7) devine:

$$Q = \frac{P}{T_a + T_v}. \tag{8}$$

Problema care se pune este de a determina variația procentuală ($y\%$) a productivității muncii, cînd producția variază cu $x\%$ față de plan.

Dacă producția variază cu $x\%$ față de plan, ea devine:

$$P + \frac{x}{100} P. \tag{9}$$

Deoarece se presupune că numărul lucrătorilor direct productivi variază cu același procent ca și producția, T_v devine:

$$T_v + \frac{x}{100} T_v. \tag{10}$$

Numărul lucrătorilor auxiliari se menține egal cu valoarea lui planificată T_a.

În aceste condiții, productivitatea muncii variază cu un procent $y\%$ și devine:

$$Q + \frac{y}{100} Q. \tag{11}$$

Ținînd seama de (9), (10) și (11) relația (8) se scrie:

$$Q + \frac{y}{100} Q = \frac{P + \frac{x}{100} P}{T_a + T_v + \frac{x}{100} T_v}. \tag{12}$$

---

[1] Dacă notăm cu $n_1, n_2, \ldots, n_k$ numărul de oameni care au lucrat cîte $z_1, z_2, \ldots, z_k$ zile, atunci $T_t = n_1 z_1 + n_2 z_2 + \ldots + n_k z_k = \Sigma n_i z_i$ om-zi.

[2] T_a și T_v reprezintă timpul de muncă efectuat de cele două categorii de lucrători N_v și N_a și se exprimă în oameni-zile.

Scăzînd pe (8) din (12) și efectuînd calculele se deduce:

$$y = \frac{100x(1-b)}{100+bx}, \qquad (13)$$

în care $b = T_v : T_t$ reprezintă raportul dintre timpul de muncă efectuat de muncitorii direct productivi și timpul total de muncă.

Valoarea acestui parametru depinde de natura întreprinderii: industrială sau de construcții, agricolă sau de transporturi etc. În transportul feroviar de exemplu, $b=0,1-0,2$; în industria alimentară, $b=0,4-0,5$; la departamentul minelor, $b=0,5-0,6$; ș.a.m.d. Parametrul b este caracteristic fiecărei întreprinderi. Cum $T_v \neq 0$ și $T_v \neq T_t$, $b \neq 0$; $b \neq 1$. În general $0 < b < 1$.

Formula (13) ne permite să calculăm variația procentuală a productivității muncii în funcție de procentul de variație a producției față de plan pe o anumită perioadă de timp.

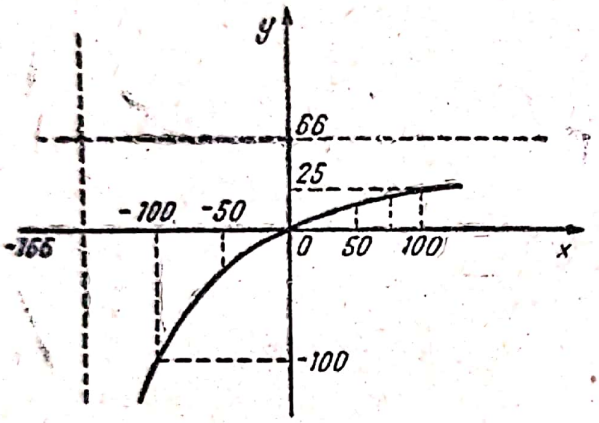


Fig. 30.

Graficul funcției (13). Vom întocmi graficul funcției (13) pentru $b = 0,6$;

$$y = \frac{200\,x}{500+3x}. \qquad (14)$$

Graficul acestei funcții este o hiperbolă, ale cărei asimptote sînt:

$x = -500:3$, paralelă cu axa Oy;

$y = 200:3$, paralelă cu axa Ox.

Cum $y' = 10^5 : (500+3x)^2 > 0$, curba va fi strict crescătoare pe domeniul ei practic de definiție: $x \in [-100, +100]$.

Folosind tabela de mai jos, am construit (fig. 30) graficul funcției (14)

x	-100		-50		-25		0		25		50		100
y	-100	↗	$-200/7$	↗	$-11,8$	↗	0	↗	$8,7$	↗	$200/13$	↗	25
y'	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$

Observații. Productivitatea muncii crește odată cu producția și scade odată cu ea.

Se constată o scădere mai accentuată decît creșterea în cazul cînd producția a fost depășită (sau nerealizată) cu același procent.

Dacă parametrul b tinde către zero curba tinde să se confunde cu prima bisectoare:

$$y = \lim_{b\to 0} \frac{100x(1-b)}{100+bx} = x.$$

Evident că în acest caz productivitatea muncii va crește cu același procent ca și producția.

Dacă b tinde către 1, hiperbola devine foarte aplatisată și tinde să se confunde cu axa Ox.

În consecință, fasciculul de hiperbole reprezentat de ecuația (13) va fi cuprins între axa Ox și prima bisectoare.

3. *Legea de variație a numărului de cumpărători ai unei mărfi în funcție de timp.*

Fie N numărul total al populației care ar putea fi aprovizionată cu un articol oarecare de larg consum (de exemplu cu o mașină electrică de spălat rufe).

Dacă notăm cu $x = x(t)$ numărul de cumpărători care au cumpărat această marfă la momentul t, atunci ritmul de cumpărare a mărfii este cu atît mai mare cu cît sînt mai mulți cumpărători și scade odată cu micșorarea numărului acelora care mai au nevoie de acea marfă.

Deci, viteza de variație a lui $x(t)$, adică $\frac{dx}{dt}$, este proporțională cu numărul populației rămase fără marfă, adică cu $N-x$.

În aceste condiții vom putea scrie:

$$\frac{dx}{dt} = k(n - x), \tag{15}$$

k fiind o constantă de proporționalitate care ne arată care este numărul mediu de cumpărători în unitate de timp.

Ecuația (15) se poate scrie sub forma:

$$\frac{dx}{N-x} = k\,dt. \tag{16}$$

Dacă integrăm în ambii membri și ținem seama de condiția inițială, că la momentul $t = 0$, $x = 0$, obținem:

$$\ln(N - x) - \ln N = -kt;\ n - x = N \cdot e^{-kt};\ x = N(1 - e^{-kt}) \tag{17}$$

Funcția (17) exprimă numărul de cumpărători în funcție de timp. Pentru a ne da seama de modul de variație a lui x în funcție de t, am construit graficul acestei funcții, luînd pe t în abscisă și pe x în ordonată, iar $k = 0{,}7$ (fig. 31).

Cum derivata funcției $x = N(1 - e^{-0,7t})$ este $x' = 0{,}7\,Ne^{-0,7t}$, tangenta în origine va fi $\operatorname{tg}\alpha = x'(0) = 0{,}7\,N$.

La momentul $t = 1$, se va obține $x = N(1 - e^{-0,7}) \approx \frac{N}{2}$, pentru $t = 10$, $x \approx N$; $x'(10) \approx 0$. În practică, valoarea lui k se poate stabili în mod corect pe baze statistice și graficul funcției (17) se poate construi în mod real pe baza datelor concrete puse la dispoziție de statistica sectorului industrial respectiv.

t	0		1		10
x	0	↗	$N/2$	↗	N
x'	$0{,}7\,N$	+	0,35	+	0

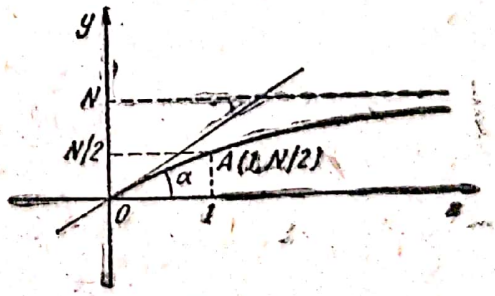


Fig. 31.

4. Variația cheltuielilor de stocare la o întreprindere, în funcție de volumul stocului.

Orice întreprindere industrială consumă într-o perioadă de timp T (de exemplu, un an) o cantitate P bine determinată (cunoscută din plan) de materie primă (sau piese de schimb etc.).

Pentru ca procesul de producție să se desfășoare fără nici o întrerupere, o anumită cantitate x din această materie trebuie să fie disponibilă în stocul acelei întreprinderi.

Dacă aprovizionarea se face zilnic, atunci $x = P : 300$ (am presupus că anul are 300 zile lucrătoare, iar dacă aprovizionarea se face o singură dată pentru întregul an, atunci $x = P$.

În general, aprovizionarea cu materie primă se face de n ori în perioada T și deci $x = P : n$, iar intervalele de timp t la care are loc aprovizionarea vor fi: $t = T : n$.

Cheltuielile de stocare se împart în două categorii:

a. Cheltuieli de manipulare și îngrijirea materialelor aflate în stoc, deci legate de cantitatea acestor materiale și pe care le notăm cu c_1.

Presupunem că, consumul de materiale aflate în stoc se face în mod uniform, stocul mediu existent în depozit în perioada t va fi $x : 2$, deoarece pînă la sfîrșitul intervalului întreaga cantitate x va fi consumată (stocul mediu $= (x + 0) : 2 = x : 2$).

b. Cheltuieli efectuate o singură dată la intrarea unei cantități x. Aceste cheltuieli legate de operațiile de înmagazinare pe care le notăm cu c_2 au loc de n ori (adică de fiecare dată cînd se face aprovizionarea, indiferent de cantitatea de materiale x care intră în stoc).

Cheltuielile de stocare[1] într-o perioadă t vor fi:

$$\frac{x}{2} \cdot c_1 \cdot t + c_2.$$

Totalul y al cheltuielilor de stocare în cele n perioade vor fi de n ori mai mari:

$$y = n\left(\frac{x}{2} c_1 t + c_2\right). \tag{18}$$

Cum din $x = P : n$, se deduce $n = P : x$, relația (18) devine:

$$y = \frac{P}{x}\left(\frac{x}{2} c_1 t + c_2\right).$$

Înlocuind pe t cu valoarea lui din $t = T : n$, în care $n = P : x$, $(t = Tx : P)$:

$$y = \frac{P}{x}\left(\frac{x}{2} c_1 \cdot \frac{Tx}{P} + c_2\right), \tag{19}$$

---

[1] Este vorba de cheltuielile care variază cu x, t și n, nu și de acele de transport sau acele de cumpărare, a căror sumă este constantă, deoarece nu depind de numărul n al tranșelor în care se face aprovizionarea.

Scanned with OKEN Scanner

sau sub forma:

$$y = \frac{Ax^2 + B}{x}, \tag{20}$$

unde $A = Tc_1 : 2$ și $B = P \cdot c_2$.

Graficul funcției (20). Domeniul de definiție în cazul unui studiu concret este $x \in (0, P]$, intervalul fiind închis la dreapta, deoarece putem avea $x = P$, în cazul cînd aprovizionarea se face o singură dată în perioada T, cu întreaga cantitate P.

Cum $y' = (Ax^2 - B) : x^2$, se anulează pentru $x = \sqrt{B : A} = \sqrt{2Pc_2 : Tc_1}$, curba va avea în punctul $M(x_0, y_0)$ un minim, deoarece $y'' = 2Pc_2 : x^3 > 0$ pentru orice $x \in (0, P]$.

Curba admite asimptota oblică $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{Ax^2 + B}{x^2} = A = Tc_1 : 2;$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [y(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{Ax^2 + B}{x} - Ax \right) = 0.$$

Asimptota oblică este dreapta $y = Ax$; $y = \frac{Tc_1}{2} x$.

Folosind tabela de mai jos, s-a întocmit graficul din figura 32.

x	0			x_0			P
y	$+\infty$	$\searrow$		y_0	$\nearrow$		$y(P)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

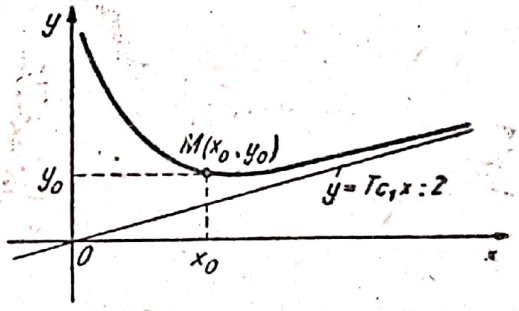


Fig. 32.

Minimul are loc în punctul M de coordonate:

$$x_0 = \sqrt{2Pc_2 : Tc_1}; \quad y_0 = \sqrt{2c_1c_2PT}. \tag{21}$$

Intervalul optim de timp, în care va trebuie să se facă aprovizionarea cu materie primă, pentru care cheltuielile de stocare sînt minime va fi:

$$t_0 = \frac{T}{P} x_0 = \frac{T}{P} \cdot \sqrt{\frac{2Pc_2}{Tc_1}} = \sqrt{\frac{2Tc_2}{Pc_1}}. \tag{22}$$

În cazul unui studiu concret, valorile lui T, P, c_1 și c_2 fiind cunoscute, formulele (21) și (22) ne vor da mărimea stocului (x_0), precum și perioada de aprovzionare (t_0) astfel încît cheltuielile de stocare să fie minime și egale cu y_0.

Aplicație. Pentru $T = 360$ zile, $c_1 = 1000$ lei, $c_2 = 10\,000$ lei, $P = 72$ vagoane; se va găsi: $t_0 = 10$ zile, $x_0 = 2$ vagoane, $y_0 = 720\,000$ lei.

Dacă aprovizionarea cu materie primă se va face la intervale de 10 zile cu cîte 2 vagoane, cheltuielile de stocare vor fi minime și egale cu 720 000 lei/an.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie. Graficul funcţiei (20) admite o asimptotă oblică.

În general, funcţiile raţionale sau iraţionale de forma:

$$f(x) = \sqrt[p]{\frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + l}{a'x^{n-p} + b'x^{n-p-1} + \ldots + l'}}, \tag{23}$$

admit asimptote oblice de forma $y = \alpha x + \beta$.

Dacă $p = 2k$; $aa' > 0$. Dacă $p = 2k + 1$; $aa' \neq 0$; $1 \leqslant p < n$.

Deoarece α şi β se obţin calculînd limitele:

$$\alpha = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad \beta = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - \alpha x], \tag{24}$$

care necesită calcule laborioase (mai ales cînd p şi n sînt mari), dăm mai jos un *algoritm*[1] care permite găsirea asimptotelor oblice direct, folosind o formulă simplă, care comportă un număr minim de calcule.

Din (23) se obţine:

$$\alpha = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[p]{\frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + l}{a'x^n + bx^{n-1} + \ldots + l'}}.$$

Dacă $p = 2k$; $aa' > 0$; $\alpha = \pm \sqrt[p]{\frac{a}{a'}}$;

dacă $p = 2k + 1$; $aa' \neq 0$; $\alpha = \sqrt[p]{\frac{a}{a'}}$.

$$\beta = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - \alpha x] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\sqrt[p]{\frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + l}{a'x^{n-p} + b'x^{n-p-1} + \ldots + l'}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt[p]{\frac{a}{a'}} \cdot x \right] = \frac{a'b - ab'}{p \cdot a'^2 \cdot \sqrt[p]{\left(\frac{a}{a'}\right)^{p-1}}} = \frac{a'b - ab'}{paa' \cdot \sqrt[p]{\frac{a'}{a}}} = \frac{a'b - ab'}{paa'} \cdot \sqrt[p]{\frac{a}{a'}}$$

Graficul funcţiei (23) va avea două asimptote oblice:

$$y = \pm \sqrt[p]{\frac{a}{a'}} \left(x - \frac{ab' - a'b}{paa'} \right), \text{ dacă } p = 2k; \; aa' > 0, \tag{25}$$

şi una singură:

$$x = \sqrt[p]{\frac{a}{a'}} \left(x - \frac{ab' - a'b}{paa'} \right), \text{ dacă } p = 2k + 1; \; aa' \neq 0, \tag{26}$$

---

[1] Denumirea provine de la numele matematicianului arab Al-Horezmi, Muhamed ibn Musa (780–850).

Prin algoritm se înţelege orice succesiune de operaţii matematice care se execută pe baza unor reguli precis determinate, se desfăşoară în timp într-o anumită ordine şi conduce în final, după un număr finit de paşi (etape, trepte) la rezolvarea unei probleme.

Exemple: algoritmul lui Euclid care ne permite să găsim c.m.m.d.c.a două numere întregi sau a două polinoame. Formula pentru rezolvarea ecuaţiei de gradul doi sau de gradul 3 (formula lui Cardan) etc.

Scanned with OKEN Scanner

Cazuri particulare

1°. $p = 1$. *Se obțin funcțiile raționale:*

$$f(x) = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + l}{a'x^{n-1} + b'x^{n-2} + \ldots + l'}\ ;\ aa' \neq 0$$

cu asimptota oblică:

$$y = \frac{a}{a'}x - \frac{\Delta}{a'^2}\ ;\quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b. \qquad [27]$$

Exemple: Asimptotele oblice ale funcțiilor raționale:

$$f_1 = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 2x - 3}\ ;\quad f_2 = \frac{x^4 + 6x^3 - 8}{2x^3 - 4x^2 + 2}\ ;\quad f_3 = \frac{8x^5 + 2x^4 + 6x - 9}{16x^4 + 4x^3 + x + 1}$$

$$y = 2x - 5\ ;\qquad y = \frac{1}{2}x + 4\ ;\qquad y = \frac{1}{2}x.$$

2°. $p = 2$. *Se obțin funcțiile iraționale:*

$$f(x) = \sqrt{\frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + l}{a'x^{n-2} + b'x^{n-3} + \ldots + l'}}\ ;\ aa' > 0\ ;\quad n \geq 2;$$

cu asimptotele oblice:

$$y = \pm\sqrt{\frac{a}{a'}}\left(x - \frac{\Delta}{2aa'}\right);\quad aa' > 0$$

Dacă $n = 2$, se obțin funcțiile iraționale:

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}\ ;\quad a > 0$$

care au două asimptote oblice:

$$y = \pm\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right);\quad a > 0.$$

Exemple:

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 3x^2 - 5}{x + 4}}\ ;\quad f_2 = \sqrt{\frac{x^5 + 4x^4 + 2x - 2}{2x^3 + 8x^2 - 6}};$$

$$y = \pm\left(x - \frac{1}{2}\right);\qquad y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x;$$

$$f_3 = \sqrt{4x^2 - 16x + 7}$$

$$y = \pm 2(x - 2).$$

3°. $p = 3$. *Se obțin funcțiile iraționale:*

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + l}{a'x^{n-3} + b'x^{n-4} + \ldots + l'}}\ ;\quad aa' \neq 0,\ n > 3,$$

Scanned with OKEN Scanner

cu asimtota oblică:

$$y = \sqrt[3]{\frac{a}{a'}}\left(x - \frac{\Delta}{3aa'}\right); \quad a \cdot a' \neq 0.$$

Dacă $n = 3$, se obţin funcţiile iraţionale:

$$f(x) = \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d}; \quad a \neq 0,$$

avînd asimptota oblică:

$$y = \sqrt[3]{a}\left(x + \frac{b}{3a}\right); \quad a \neq 0.$$

Exemple:

$$f_1 = \sqrt[3]{\frac{x^4 + x^3 - 5}{x - 1}}; \quad f_2 = \sqrt[3]{\frac{8x^6 - 4x^4 + 5x - 9}{x^3 + 2x - 7}}; \quad f_3 = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + x},$$

$$y = x + \frac{2}{3}; \qquad y = 2x; \qquad y = x + 1.$$

— Ecuaţiile asimptotelor oblice ale funcţiilor iraţionale (23), depind numai de indicile p al radicalului, şi de elementele matricei:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, \text{ a cărui determinant } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b,$$

apare la numărătorul termenului liber; nu şi de gradul polinoamelor de sub radical.

— Algoritmul[1] obţinut în (25), (26) şi (27) este simplu şi necesită 3 ..7 operaţii elementare.

— Acest algoritm a fost programat pe calculatoarele electronice şi folosit pentru reprezentarea grafică a funcţiilor raţionale şi iraţionale care admit asimptote oblice.

— Ecuaţiile asimptotelor oblice se obţin uşor şi manual fără riscul de a greşi la calcule în cîteva secunde, eliminînd astfel munca obositoare pentru calculul limitelor (24).

— Dacă funcţiile iraţionale au indicele impar ($p = 2k + 1$), nu mai este necesar să calculăm limitele pentru $x \to +\infty$ şi $x \to -\infty$, deoarece aceste două limite coincid (formula 26).

— Dacă indicele funcţiei iraţionale este par ($p = 2k$), se obţin pentru α şi β două valori egale şi de semne contrarii, iar funcţia admite două asimptote distincte şi simetrice faţă de axa Ox (date de formulele (25)).

— Pentru cei ce doresc să calculeze pe α şi β folosind limitele (24), algoritmul constituie cel mai simplu mijloc de verificare.

5. *Legea normală fundamentală*

În calculul probabilităţilor, una din repartiţiile mai des întîlnite în practică este *„repartiţia normală"*.

---

[1] A fost prezentat de conf. univ. C. Mihu în sesiunea de comunicări ştiinţifice a Academiei militare din 18—19 noiembrie 1980.

Scanned with OKEN Scanner

O variabilă aleatoare[1] continuă urmează o lege normală de repartiție dacă funcția de probabilitate a valorilor posibile $x \in (-\infty, +\infty)$ este de forma:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{28}$$

în care: $e \approx 2{,}71828$; $\pi \approx 3{,}14159$; a = valoarea medie a variabilei aleatoare și σ^2 = dispersia acelei variabile[2].

Pentru $a = 0$ și $\sigma = 1$, se obține funcția:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{29}$$

care reprezintă densitatea de probabilitate a repartiției normale standard.

Graficul funcției de probabilitate.

Pentru a construi graficul funcției de probabilitate vom considera funcția:

$$f(x) = e^{-x^2},$$

care este de aceeași formă cu (28)

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0 \to x = 0; f(0) = 1;$$

$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2) = 0 \to x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \; f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}};$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Folosind datele din tabela:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$1/\sqrt{e}$	↗	1	↘	$1/\sqrt{e}$	↘	0
$f'(x)$	+		+		0		−	−	−
$f''(x)$	+		0		+		0	−	+

rezultă graficul din figura 33.

---

[1] Întîmplătoare. În latină alea înseamnă zar.

[2] Reprezintă media aritmetică a pătratelor abaterilor,

$$\sigma^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right] : n; \text{ iar } \bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) : n = \text{media aritmetică.}$$

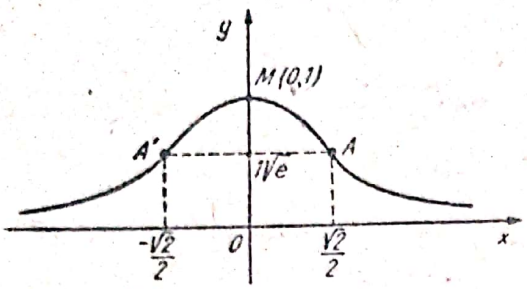


Fig. 33.

Observații: — Curba de repartiție normală este o curbă în clopot, care poartă numele de *„clopotul lui Gauss"*.

— Toatel curbele de repartiție normală (28) au un punct de maxim (situat pe axa Oy, sau într-un punct oarecare $x_0 = a$; $y_0 = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$).

— Toate curbele sînt simetrice față de o dreaptă verticală dusă prin punctul de maxim, numită axă de simetrie. Această dreaptă se confundă cu axa Oy (dacă $a = 0$) sau este paralelă cu ea (dacă $a \neq 0$).

Din această proprietate rezultă că valorile egal depărtate de valoarea cea mai probabilă, au probabilități egale:

$$f(-\alpha) = f(\alpha)\,;\quad \alpha \in [0,\ \infty].$$

— În apropierea punctului de maxim, curbele sînt concave ($f''(0) < 0$), iar la o anumită distanță de el, devin convexe, $\left(f''(x) > 0,\ \text{pentru}\ \frac{\sqrt{2}}{2} < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Punctele $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ $A'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ sînt puncte de inflexiune (fig. 33).

Pentru fiecare curbă de repartiție normală se poate arăta că întreaga arie situată între graficul curbei și axa Ox este egală cu unitatea. Aceasta înseamnă că, probabilitatea ca variabila aleatoare să ia o valoare oarecare din mulțimea valorilor posibile este egală cu certitudinea.

3. *Lănțișorul* este o curbă plană, care reprezintă poziția de echilibru a unui fir greu și omogen, flexibil dar inextensibil supus gravitației, ale cărui capete sînt fixate în două puncte. Problema a fost pusă de Galileo Galilei (1638), ecuația ei a fost dată în 1691, de Johann Bernoulli, Gottfried Leibniz și Christian Huygens.

Ecuația acestei curbe este:

$$f(x) = a \cdot \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \tag{30}$$

Cum

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = 0 \to x = 0\,;\quad f(0) = a,$$

curba admite un extrem în $x = 0$.

Se constată apoi că $f(-x) = f(x)$ și deci curba este simetrică față de axa Oy.

Folosind datele din tabela:

x	$-\infty$		$-a$		0		a		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1{,}5\ a$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$1{,}5a$	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$		0		$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$

se obține graficul din figura 34.

Lănțișorul este folosit în studiul podurilor suspendate pe doi piloni, în amplasarea conductelor electrice sau telefonice între doi stîlpi ș.a.

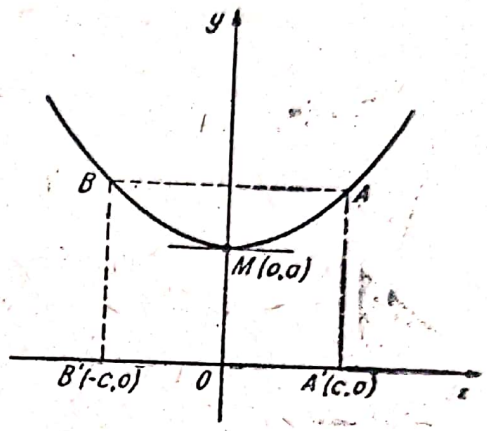


Fig. 34.

Probleme propuse

Se cere graficul următoarelor relații:

1. *Strofoida*

$x(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0$; $a \in \mathbb{R}^+$.

R. Se va construi numai ramura:

$$y = x\sqrt{(a + x) : (a - x)},$$

definită pe intervalul $x \in [-a, +a)$, care admite un minim în $x = a(1 - \sqrt{5}) : 2$ și asimptota $x = a$.

În greacă: strophеion = odgon; eidos = aspect. A fost studiată de Torricelli (1645) ca loc geometric. Denumirea i-a fost dată de E. Montucci (1846).

2. *Cisoida lui Diocles:*

$$y^2(2a - x) = x^3; \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

R. Se va construi numai ramura pozitivă:

$$y = x\sqrt{x : (2a - x)},$$

definită pe $x \in [0, 2a)$. Ramura negativă este simetrică față de axa Ox.

În greacă: kisos = iederă. A fost descoperită de Diocles (sec. 2 î.e.n.), care a folosit-o la rezolvarea problemei „dublării cubului" (găsirea unui segment $x = a \cdot \sqrt[3]{2}$).

3. *Versiera*:

$$y(x^2 + a^2) = a^3.$$

R. Este o curbă simetrică față de axa Ox, avînd un maxim în $M(0, a)$ și axa Ox ca asimptotă.

Fermat (1601—1665) a arătat că aria S mărginită de curbă și axa Ox este egală cu aria cercului de rază a ($S = \pi a^2$).

Scanned with OKEN Scanner

4. *Astroida:*

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \; ; \quad a \in \mathbf{R}^+.$$

R. Sub formă explicită:

$$y = (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2})^{3/2}.$$

Are patru puncte de întoarcere $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$; $B(0, a)$; $B'(0, -a)$. A fost studiată de G. Leibniz în 1715. (fig. 75).

5. *Tractricea (sau tractoare):*

Explicitată în funcție de y este:

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \; ; \quad a \in \mathbf{R}^+.$$

R. Are proprietatea: segmentul de tangentă, cuprins între punctul de tangență și axa Ox este constant și egal cu a ($||MT|| = ||OA|| = a$). Vîrful $A(0, a)$ este punct de întoarcere (fig. 35).

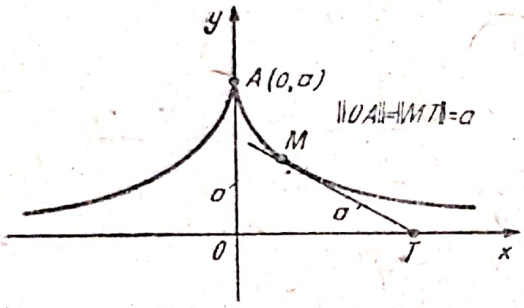


Fig. 35.

Axa Ox este asimptotă. Apariția ei este legată de considerații mecanice. A fost descoperită de G. Leibniz (1693), studiată de Chr. Huygens și de A. J. Fresnel, care a dat și unele dispozitive mecanice pentru trasarea acestei curbe.

Prin rotația ei în jurul axei Ox se obține corpul numit PSEUDOSFERĂ, pe care se realizează geometria Lobacevski-Bolyai.

6. *Lemniscata lui Bernoulli*, a cărei ecuație sub forma implicită este:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

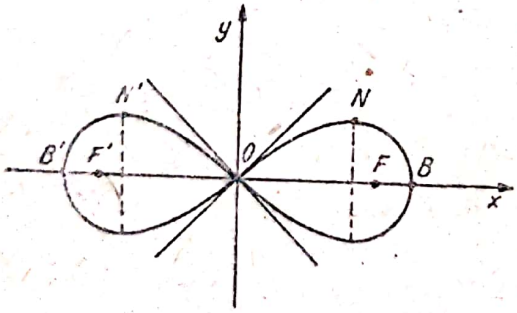


Fig. 36.

R. A fost obținută de Jacques Bernoulli (1694), ca o soluție a unei probleme de mecanică.

Se poate defini ca locul geometric al punctelor M pentru care produsul distanțelor la două puncte fixe

$$F(a, 0) \; ; \quad F'(-a, 0)$$

este constantă și egală cu a^2

$$(||MF|| \cdot ||MF'|| = a^2).$$

Taie axa Ox în punctele $B(a\sqrt{2}, 0)$; $B'(-a\sqrt{2}, 0)$, originea fiind un punct dublu. Are două puncte de maxim și două puncte de minim $N(a\sqrt{3}/2, a/2)$; $N'(-a\sqrt{3}/2, a/2)$ și simetricile lor față de axa Ox (fig. 36).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

PROBLEME DE MAXIM ŞI DE MINIM

În acest capitol vom rezolva cîteva probleme de maxim şi minim *folosind analiza matematică* (cu ajutorul derivatelor).

A realiza cu un efort minim un efect maxim este un principiu care stă la baza tuturor acţiunilor noastre.

Acest principiu cunoscut sub numele de *„principiul minimei acţiuni"* (sau principiul lui Maupertuis) este urmat de altfel şi de multe fenomene din natură.

— Lumina se propagă de la un punct la altul în linie dreaptă ; ea îşi alege astfel *drumul cel mai scurt.*

— Dacă o rază de lumină se reflectă într-o oglindă, unghiul de incidenţă este egal cu unghiul de reflexie şi deci suma distanţelor de la sursa luminoasă reflectată în oglindă pînă la ochi este de *asemenea minimă.*

— Dacă o rază de lumină trece prin două medii diferite, de exemplu prin aer şi prin apă, prin care viteza de propagare este diferită, v_1 şi v_2, atunci drumul parcurs prin cele două medii este astfel ales încît timpul total parcurs de acea rază *să fie minim.*

Acest adevăr, cunoscut sub numele de „legea refracţiei" descoperită de Snellius (1620) este concretizat în formula :

$$\sin \alpha : \sin \beta = v_1 : v_2,$$

în care α şi β sînt unghiul de incidenţă, respectiv unghiul de refracţie, iar v_1 şi v_2 reprezintă viteza luminii în cele două medii diferite, în aer şi apă.

— În lumea animală, acest lucru se aplică în mod instinctiv. De exemplu, s-a observat că fagurii făcuţi de albine au o formă invariabilă şi anume prisme hexagonale, terminate la fund cu un poliedru mărginit de romburi. Solidul astfel construit închide *volumul maxim* înconjurat de o *suprafaţă minimă.* Albinele realizează astfel o capacitate maximă pentru miere cu minimum de ceară.

Maraldi a măsurat cu atenţie unghiurile feţelor rombice şi le-a găsit $\alpha = 70°32'$; $\beta = 109°28'$ (în fig. 37 se poate vedea o celulă desfăşurată şi cele 3 romburi care închid fundul).

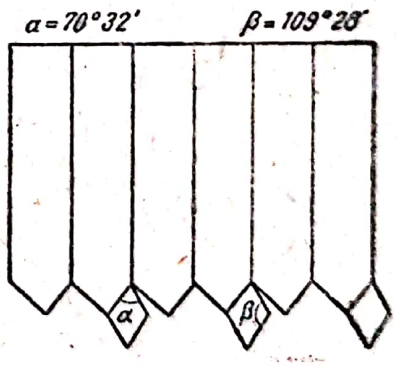


Fig. 37.

Réamur entuziasmat de „cunoştinţele de geometrie ale albinelor" s-a adresat matema-

matematicianului König din Berna pentru a rezolva problema fără a-i spune care este originea ei.

König a tratat această problemă folosind analiza matematică și a publicat rezultatul în 1739, găsind $\alpha = 70°34'$ și $\beta = 109°26'$.

S-a găsit astfel o coincidență uimitoare între calculele matematice și practica de mii de ani a albinelor.

Matematicianul englez Mac-Laurin nu a admis această diferență de 2' la unghiuri. În anul 1743 reface calculele și obține unghiurile măsurate de Maraldi. S-a constatat ulterior că nici König nu greșise calculele dar tabelele de logaritmi folosite de el aveau erori. În acest mod „albinele au reușit să corecteze tabele de logaritmi" alcătuite de calculatori experimentați.

Problemele de maxim și minim prezintă un interes deosebit în activitatea practică, în construcții sau în transporturi, în industrie sau în agricultură etc.

Unele probleme de maxim și minim conduc prin rezolvarea lor la economii de materii prime sau materiale, altele ne dau timpul minim pentru executarea unei lucrări.

În cele ce urmează vom da cîteva exemple, rezolvate cu ajutorul analizei matematice, punînd în evidență și economiile ce se pot realiza.

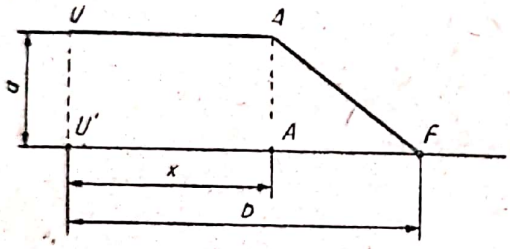


Fig. 38.

1. O uzină electrică U se află pe marginea unui rîu de lățimea a km. Pe marginea opusă acestui rîu se află o fabrică F la distanța de b km de proiecția U' a punctului A unde se află uzina electrică (fig. 38).

Se întreabă *cum este mai economic* să se instaleze un cablu care leagă uzina cu fabrica, știind că pe mal, costul instalației cablului este de m lei/km, iar prin apă n lei/km (se presupune $n \geqslant m$).

Soluție. Dacă notăm $\|UA\| = x$ lungimea cablului pe pămînt, de la U la A, atunci funcția al cărei minim se caută va fi:

$$C(x) = m \cdot \|UA\| + n \cdot \|AF\| = mx + n\sqrt{a^2 + (b - x)^2}.$$

Anulînd prima derivată obținem:

$$C'(x) = m - \frac{n(b - x)}{\sqrt{a^2 + (b - x)^2}} = 0; \quad x_0 = b - \frac{ma}{\sqrt{n^2 - m^2}}; \quad AF = \frac{na}{\sqrt{n^2 - m^2}},$$

iar *costul minim*[1] al instalației va fi:

$$C_{min} = mx_0 + n\sqrt{a^2 + (b - x_0)^2} = mb + a\sqrt{n^2 - m^2}.$$

Problema admite soluții reale numai în cazul cînd $n \geqslant m$, care este de fapt și condiția reală, deoarece este evident că instalația unui cablu prin apă costă mai scump decît pe uscat.

Dacă $n = m$; cablul va fi instalat pe distanța cea mai scurtă de la U la F; $x_0 = \|UF\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, iar $C_{min} = m \cdot \|UF\| = m\sqrt{a^2 + b^2}$.

[1] Costul este minim deoarece $C''(x_0) = (n^3 - m^3) : n > 0$; $n > m$ prin ipoteză.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicație: $a = 0{,}5$ km; $b = 4$ km; $m = 6000$ lei/km; $n = 10\,000$ lei/km.

Se obține: $x_0 = \|UA\| = 3625$ m; $\|AE\| = 625$ m; $C_{min} = 28\,000$ lei.

2. Pe malul unui rîu de lățime a se află o uzină electrică A. În partea opusă rîului se află o fabrică la distanța b de malul opus și la distanța c de proiecția B' a locului unde se află uzina.

Se întreabă *cum este mai economic* să se instaleze cablu care leagă uzina cu fabrica, știind că pe uscat costul instalației (inclusiv costul) cablului este de m lei/km, iar prin apă de n lei/km ($n > m$).

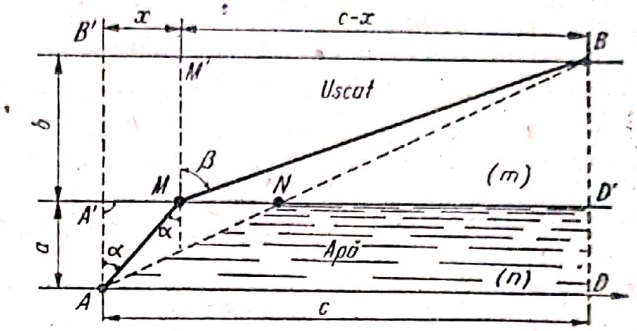


Fig. 39.

Soluție. Folosind notațiile din figura 39, funcția al *cărei minim* se caută este:

$$C(x) = n \cdot \|AM\| + m \cdot \|BM\| = n \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + m \cdot \sqrt{b^2 + (c - x)^2}.$$

Egalînd derivata cu zero, se obține:

$$C'(x) = \frac{nx}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{m(c - x)}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0. \qquad (1)$$

Dar, din $\triangle AA'M$ și $\triangle MM'B$ se deduce:

$$\sin\alpha = \frac{\|A'M\|}{\|AM\|} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}; \quad \sin\beta = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}, \qquad (2)$$

și deci relația (1) devine:

$$n \sin\alpha - m \sin\beta = 0, \text{ sau } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{m}{n}. \qquad (3)$$

Observație: Dacă dintr-un punct A (fig. 40) situat în apă, pleacă o rază de lumină și ajunge la suprafața apei în M cu viteza v_1, apoi din M va ajunge în B cu viteza v_2 ($v_1 \neq v_2$ deoarece viteza luminii prin cele două medii apă și aer prin care trece este diferită), drumul parcurs este astfel ales, încît timpul necesar pentru a ajunge din A în B să fie cel mai mic posibil, adică expresia:

$$t = \frac{AM}{v_1} + \frac{BM}{v_2}, \qquad (4)$$

să fie minimă. Condiția (4) se exprimă prin relația (5) care reprezintă legea refracției (descoperită de Snellius):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_2}{v_1}, \qquad (5)$$

unde α și β sînt unghiurile de incidență și refracție.

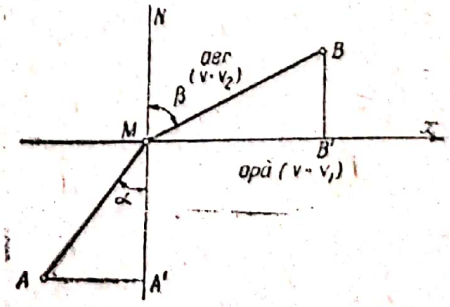


Fig. 40.

Se constată că relaţia obţinută de noi în (3) şi relaţia (5) au aceeaşi formă. Rezultă că, direcţia de instalare a cablului trebuie astfel aleasă încît să urmeze drumul parcurs de raza de lumină ce trece prin două medii diferite.

Valorile lui α şi β se pot obţine şi ca soluţie a sistemului:

$$n \sin\alpha = m \sin\beta\,; \quad a \operatorname{tg}\alpha = b \operatorname{tg}\beta = c. \tag{6}$$

Ultima ecuaţie rezultă din triunghiurile dreptunghice $AA'M$ şi $MM'B$ (fig. 89).

Costul minim al instalaţiei se va realiza atunci cînd sinusul unghiurilor formate de direcţiile celor două conducte AM şi BM cu perpendicularele duse pe malul rîului în A şi M sînt invers proporţionale cu preţurile de cost unitare al conductelor instalate pe aceste direcţii (3).

Aplicaţie: Pentru $a = 2$ km, $b = 3$ km, $c = 7$ km, $n = 2m$, relaţia (1) ne conduce la ecuaţia:

$$3x^4 - 42x^3 + 179x^2 + 56x - 196 = 0, \tag{7}$$

care admite soluţia $x_1 = 1$. Ecuaţia (7) mai admite o soluţie negativă $x_2 \in [-2, -1)$, care nu convine problemei şi două complexe. Pentru $x = 1$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$, relaţiile (2) ne dau:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}447\,; \quad \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}894\,; \quad \alpha \approx 26°35',\ \beta \approx 63°35'.$$

$$C_{min} = 2m\sqrt{1+4} + m\sqrt{9+36} = 2m\sqrt{5} + m\sqrt{45} = 5m\sqrt{5} \approx 11{,}18\,m.$$

Dacă am instala conducta pe drumul direct ANB (fig. 39), lungimea ei ar fi fost mai mică, deoarece $||AB|| < ||AM|| + ||MB||$, dar costul ar fi mai mare. În acest caz, costul direct ar fi:

$$C_{AB} = m\,||AN|| + n\,||NB|| = 2m \cdot \frac{2}{5}\sqrt{74} + m\,\frac{3}{5}\sqrt{74} = \frac{7m}{5}\sqrt{74} \approx$$

$$\approx 12{,}04\,m,$$

şi reprezintă o creştere de 7,7% faţă de costul minim. $||A'N||$ şi $||ND'||$ au fost obţinute din $\triangle AA'N \sim \triangle NBD'$:

$$\frac{||A'N||}{a} = \frac{||ND'||}{b} = \frac{||A'N|| + ||ND'||}{a+b} = \frac{c}{a+b};$$

$$||A'N|| = \frac{ac}{a+b} = \frac{14}{5}\,; \quad ||ND'|| = \frac{bc}{a+b} = \frac{21}{5}\,;$$

$$||AN|| = \sqrt{2^2 + 14^2 : 5^2} = \frac{2}{5}\sqrt{74}\,; \quad ||NB|| = \sqrt{3^2 + 21^2 : 5^2} = \frac{3}{5}\sqrt{74}.$$

3. Să se determine poziţia de amplasare a unei uzine termoelectrice care urmează a deservi 3 localităţi ce formează un triunghi ABC, astfel încît instalaţia (şi costul conductelor) care leagă uzina cu cele 3 localităţi să fie cît mai economică.

Această problemă se poate enunţa şi astfel: se dau 3 puncte în plan, nesituate în linie dreaptă; să se determine un al patrulea punct M, astfel încît suma distanţelor lui la cele 3 puncte *să fie minimă*.

Soluție. Pentru a rezolva problema folosind analiza matematică se consideră punctul $M(x, y)$ și vîrfurile triunghiului $A(-a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$ într-un sistem ortogonal xOy (fig. 41).

Funcția al cărei minim se caută este:

$$F(x, y) = \sqrt{(x + a)^2 + y^2} + \sqrt{(b - x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (c - y)^2}.$$

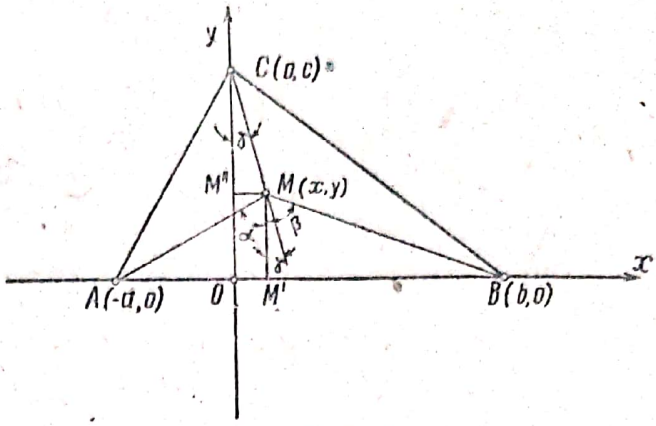


Fig. 41.

Coordonatele punctului de minim sînt soluțiile sistemului ce se obține egalînd cu zero derivatele parțiale de ordinul întîi în raport cu x și y:

$$f'_x(x, y) = \frac{x + a}{\sqrt{(x + a)^2 + y^2}} - \frac{b - x}{\sqrt{(b - x)^2 + y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (c - y)^2}} = 0 \quad (8)$$

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{(x + a)^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(b - x)^2 + y^2}} - \frac{c - y}{\sqrt{x^2 + (c - y)^2}} = 0. \quad (9)$$

Rezolvarea acestui sistem prezintă unele dificultăți. Se constată însă că sistemul format din ecuațiile (8) și (9) este echivalent cu sistemul format din ecuațiile trigonometrice:

$$\sin\beta - \sin\alpha = \sin\gamma \quad (8')$$

$$\cos\beta + \cos\alpha = \cos\gamma, \quad (9')$$

care se deduc din triunghiurile dreptunghice AMM', BMM' și CMM''.

Într-adevăr, relația (8) se poate scrie sub forma:

$$\frac{\|M'A\|}{\|AM\|} - \frac{\|M'B\|}{\|MB\|} + \frac{\|MM''\|}{\|MC\|} = 0.$$

Cum

$$\frac{\|M'A\|}{\|AM\|} = \sin\alpha, \text{ din } \triangle AMA',$$

$$\frac{\|M'B\|}{\|MB\|} = \sin\beta, \text{ din } \triangle BMM',$$

$$\frac{\|MM''\|}{\|MC\|} = \sin\gamma, \text{ din } \triangle CMM'',$$

rezultă $\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma = 0$, identică cu (8'). În mod analog se deduce și (9').

Scanned with OKEN Scanner

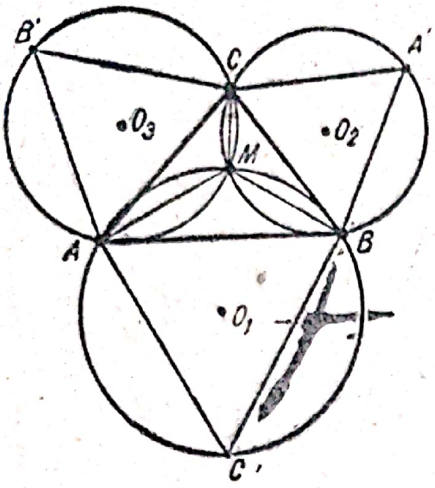


Fig. 42.

Dacă în (8') şi (9') ridicăm la pătrat şi adunăm obţinem:

$$2\cos(\alpha+\beta) = -1;\quad \alpha+\beta = \widehat{AMB} = 120°,$$

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2} = \sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\alpha-\beta = -2\gamma;\quad \gamma = 60° - \alpha.$$

Cum $\widehat{AMC} = 180° - \alpha - \gamma = 180° - \alpha - (60° - \alpha) = 120°$; rezultă:

$$\widehat{AMC} = \widehat{AMB} = \widehat{BMC} = 120°;$$

acelaşi rezultat obţinut în cap. II, unde s-a folosit o metodă geometrică; din punctul M, laturile triunghiului se văd sub un unghi de 120° şi se află la intersecţia cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale ABC', BCA', CAB' construite pe laturile triunghiului ABC (fig. 42).

4. De-a lungul unui traseu de cale ferată se află două şantiere de construcţii A şi B ($||AB|| = a$). Un al treilea şantier C se află la distanţa c de linia ferată ($||CC'|| = c$), iar distanţa de la şantierul A la proiecţia C' a şantierului C pe direcţia AB este b ($||AC'|| = b$). De-a lungul căii ferate trebuie instalată o magazie de materiale M care va alimenta cele 3 şantiere A, B, C (fig. 43). Să se determine poziţia de amplasare a magaziei, ştiind că numărul mediu zilnic de transporturi efectuate de la magazie este diferit şi că suma distanţelor efectuate pentru transporturile zilnice trebuie *să fie minimă*.

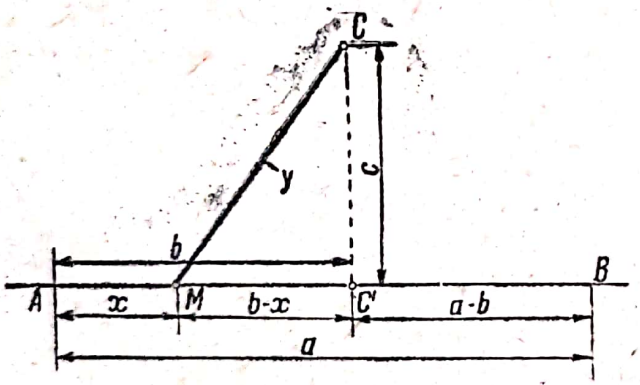


Fig. 43.

Soluţie. Dacă notăm cu N_a, N_b, N_c numărul mediu de transporturi efectuate pe zi la cele 3 şantiere A, B, C funcţia al cărei minim se caută va fi:

$$L = x\cdot N_a + (a-x)N_b + ||MC||\cdot N_c = x(N_a - N_b) + aN_b + yN_c.$$

Cum $a\cdot N_b$ este o constantă, minimul lui L este atins odată cu minimul funcţiei:

$$F(x) = x(N_a - N_b) + N_c\sqrt{(b-x)^2 + c^2}.$$

Derivata funcţiei $F(x)$:

$$F'(x) = N_a - N_b - \frac{(b-x)N_c}{\sqrt{(b-x^2)+c^2}},$$

Scanned with OKEN Scanner

se anulează pentru[1]:

$$x_0 = b \pm \frac{c(N_a - N_b)}{\sqrt{N_c^2 - (N_a - N_b)^2}}, \qquad (10)$$

și se va lua semnul $-$ în fața radicalului, dacă $N_a > N_b$ și $+$ dacă $N_a < N_b$. Dacă $N_a = N_b$, $M = C'$ magazia va fi instalată la piciorul C' al perpendicularei $|CC'|$ pe $|AB|$ ($x_0 = b$, $y_0 = c$).

Aplicație numerică: Pentru $a = 600$ m, $b = 400$ m, $c = 240$ m, $N_a = 10$, $N_b = 6$, $N_c = 5$, se va găsi:

$$x_0 = 400 - \frac{240 \cdot (10 - 6)}{\sqrt{5^2 - (10 - 6)^2}} = 800 \text{ m},$$

$$y_0 = \sqrt{(400 - 80)^2 + 240^2} = 400 \text{ m}.$$

$$L_{min} = 80\,(10-6) + 600 \cdot 6 + 400 \cdot 5 = 5\,920 \text{ m}.$$

Dacă $N_a = 6$ și $N_b = 10$, adică $N_a < N_b$, s-ar fi luat semnul $+$ în fața radicalului și rezultatul ar fi fost același ($x_0 = 80$, $y_0 = 400$).

Dacă $N_a = N_b = 6$; $x_0 = b = 400$ m; $y_0 = c = 240$ m;

$$L_{min} = a N_b + y_0 N_c = 600 \cdot 6 + 240 \cdot 5 = 4800 \text{ m}.$$

În general, poziția de amplasare a magaziei este dată de relația (10), $y = \dfrac{c \cdot N_c}{\sqrt{N_c^2 - (N_a - N_b)^2}}$; $L_{min} = b N_a + (a - b) N_b + c\sqrt{N_c^2 - (N_a - N_b)^2}$.

5. O fabrică se află situată între două șosele perpendiculare Ox și Oy. Se cere să se construiască un drum rectiliniu care să unească fabrica cu cele două șosele, astfel încît costul acestui drum *să fie minim*, adică lungimea $\|PA\| + \|PB\| = \|AB\|$ să fie minimă.

Soluție. Folosind notațiile din fig. 44, funcția al cărei minim se caută este:

$$f(x, y) = \sqrt{(a - x)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (y - b)^2}, \qquad (11)$$

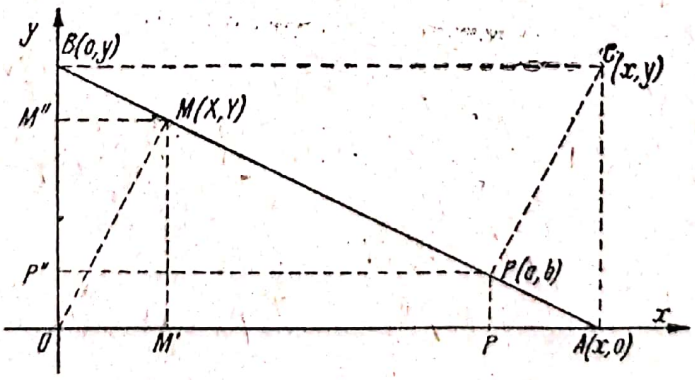


Fig. 44.

[1] x_0 corespunde unui minim deoarece $F''(x_0) = c^3 \cdot N_c[N_c^2 - (N_a - N_b)^2]^{3/2} > 0$;

și deoarece punctul $P(a, b)$ se află pe dreapta AB, avem și relația de legătură între x și y:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1. \tag{12}$$

Eliminînd pe y între relațiile (11) și (12) se obține:

$$f(x) = \frac{x}{x-a}\sqrt{b^2 + (a-x)^2}.$$

Derivata acestei funcții:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}} - \frac{a\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}{(x-a)},$$

se anulează[1] pentru:

$$x_0 = a + \sqrt[3]{ab^2}; \quad y_0 = b + \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Lungimea minimă a drumului va fi:

$$\min f = \|AB\| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^{3/2}.$$

Aplicație numerică: Dacă $a = 8$ km și $b = 1$ km, găsim:

$$x_0 = 8 + \sqrt[3]{8} = 10, \; y_0 = 1 + \sqrt[3]{64} = 5,$$

$$\min f = \|AB\| = (\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{1})^{3/2} = 5\sqrt{5} \approx 11{,}180 \text{ km}.$$

Observații. Se poate arăta că perpendiculara în A pe Ox, în B pe Oy și în P pe $|AB|$ sînt concurente și deci patrulaterul $OACB$ este un dreptunghi. De asemenea, se constată că perpendiculara din O pe $|AB|$ determină pe $|AB|$ un segment $\|BM\| = \|PA\|$, deoarece $\Delta OMB \equiv \Delta APC$.

6. Dintr-o foaie de carton sau de tablă de forma unui poligon regulat cu n laturi se cere să se construiască o cutie în formă de piramidă dreaptă, a cărei bază să fie un poligon regulat cu același număr n de laturi, astfel încît capacitatea ei *să fie maximă*.

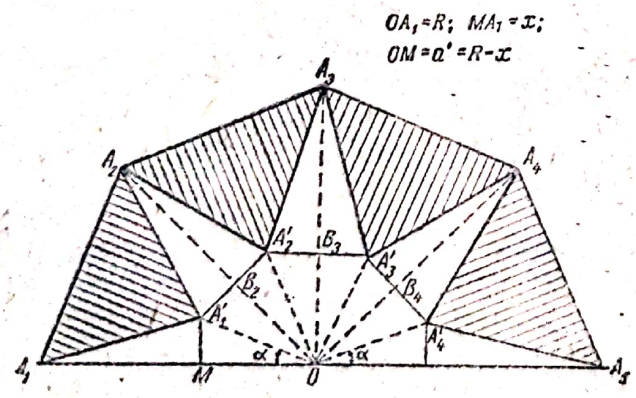


Fig. 45.

Soluție. Dacă notăm cu R raza cercului circumscris poligonului $A_1 A_2 \ldots A_n$ și cu a apotema poligonului de bază, $A'_1 A'_2 \ldots A'_n$, condiția de posibilitate a construcției (așa cum rezultă din figura 45) este:

$$0 \leqslant \|OB_1\| \leqslant \frac{R}{2}, \text{ sau } 0 \leqslant a \leqslant \frac{R}{2}.$$

[1] Se constată prin calcul că $f''(x_0) > 0$; și deci x_0 corespunde unui minim.

Scanned with OKEN Scanner

Cazurile limită $a = \frac{R}{2}$ și $a = 0$ conduc la un volum egal cu zero.

Dacă notăm cu:

L — latura poligonului dat $A_1 A_2 \dots A_n$,

l — latura poligonului de bază $A_1' A_2' \dots A_n'$,

$\alpha = \frac{\pi}{n}$, unghiul la centru format de $|OA_i|$ și $|OA_i'|$,

$x = \|OA_i'\|$, raza cercului circumscris poligonului $A_1' A_2' \dots A_n'$, se obțin relațiile:

$$l = 2x \sin \alpha,\ a = x \cos \alpha,\ \|A_1 B_1\| = R - x \cos \alpha. \tag{13}$$

Dacă h și V reprezintă înălțimea și volumul piramidei obținute după decuparea triunghiurilor haşurate și îndoirea triunghiurilor rămase (de-a lungul dreptelor $A_1' A_2'$, $A_2' A_3'$, ..., $A_n' A_1'$) pînă cînd se întîlnesc toate într-un singur punct (vîrful piramidei), vom putea scrie:

$$h^2 = \|A_1 B_1\|^2 - \|OB_1\|^2 = (R - x \cos \alpha)^2 - x^2 \cos^2 \alpha = R^2 - 2Rx \cos \alpha;$$

$$V = \frac{S \cdot h}{3} = \frac{n \cdot l \cdot a \cdot h}{6} = k \cdot x^2 \sqrt{R^2 - 2Rx \cos \alpha};\ \text{unde } k = \frac{n \sin 2\alpha}{6}.$$

$$V' = \frac{2R^2 x - 5Rx^2 \cos \alpha}{\sqrt{R^2 - 2Rx \cos \alpha}} = 0;\ \Rightarrow x_1 = \frac{2}{5} R \sec \alpha;\ x_2 = 0.$$

Se constată că $x_2 = 0$, corespunde unui minim[1] ($V = 0$), iar x_1 unui maxim. Se va găsi:

$$a = \frac{L}{5} \operatorname{cosec} \alpha;\ \max V = \frac{\sqrt{5}}{750} n L^3 \cdot \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha. \tag{14}$$

Observație: Dacă $n = 3$, valoarea maximă a apotemei pentru care se poate realiza o construcție a piramidei este: $a = \frac{R}{4}$.

Cum maximul lui a ce corespunde lui $n = 3$, obținut prin formulele de mai sus este:

$$a = \frac{L}{5} \operatorname{cosec} \alpha = \frac{2R \sin \alpha}{5} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2R}{5} > \frac{R}{4},$$

acest maxim nu poate fi atins. Volumul maxim al piramidei triunghiulare regulate se va obține pentru $a = \frac{R}{4}$, care este cea mai mare valoare a lui a apropiată de $\frac{2R}{5}$, pentru care construcția este posibilă.

Piramida triunghiulară astfel obținută are toate fețele triunghiuri echilaterale egale, este deci un tetraedru regulat cu muchia $L/2$.

---

[1]

x	$-x_1$		0		$x_1/2$		x_1		$2x_1$
$V'(x)$	−	↘	0 (m)	↗	+	↗	0 (M)	↘	−

$x_1 = \frac{2}{5} R \sec \alpha;\ x_2 = 0$

Folosind formulele de mai sus, cititorul poate calcula singur valorile apotemei (a), a laturii (l) pentru poligonul bazei, precum și max V, pentru $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$.

7. Uneori, vopselele se vînd în cutii de tablă cilindrice cu un volum $v = 250$ cm³. Ele au o deschidere circulară care se închide cu un capac din material plastic. Raportul dintre diametrul acestei deschideri și diametrul cutiei este 4 : 5.

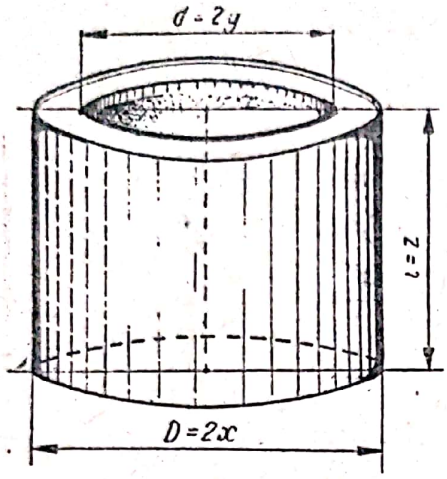


Fig. 46.

Să se determine dimensiunile cutiei, astfel încît costul tablei necesare confecționării ei *să fie minim*.

Soluție. Folosind notațiile din figura 46, funcția al cărei minim se caută se compune din aria laterală, aria bazei și aria coroanei circulare:

$$f(x, y, z) = 2\pi xz + \pi x^2 + \pi(x^2 - y^2),$$

cu relațiile de legătură: $y : x = 4 : 5$ și $\pi x^2 z = 250$.

Eliminînd pe y și z între aceste relații, găsim funcția:

$$f(x) = 2\pi\left(\frac{250}{\pi x} + \frac{17}{25}x^2\right).$$

Derivata acestei funcții:

$$f'(x) = 2\pi\left(\frac{34x}{25} - \frac{250}{\pi x^2}\right),$$

se anulează pentru $x = \sqrt[3]{6250 : 34\pi} \approx 3{,}88$ cm. Cum $f''(x) = 2\pi\left(\frac{34}{25} + \frac{500}{\pi x^3}\right) > 0$ pentru $x = 3{,}88$, valoarea găsită corespunde unui minim. Se va găsi apoi $D = 77{,}6$ mm; $d = 62$ mm; $l = z = 52{,}8$ mm, iar costul minim al tablei necesare confecționării unei cutii va fi:

$$\min C = 0{,}0192\, c \text{ lei},$$

unde c este costul unui metru pătrat de tablă.

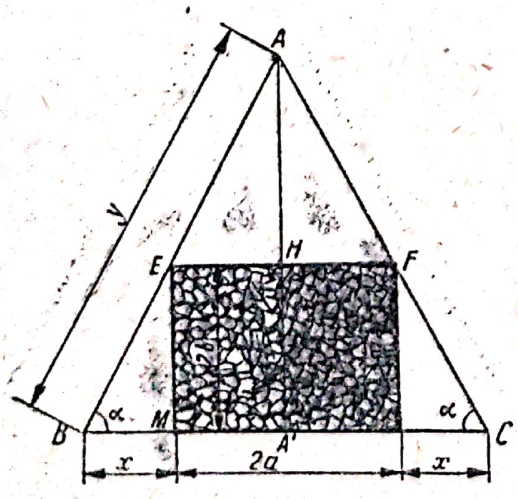


Fig. 47.

8. Stivele de cărbuni-brichete au secțiunea unui dreptunghi sau un pătrat. Pentru a fi ferite contra intemperiilor atmosferice, ele se acoperă cu scînduri sprijinite pe stivă și pe sol, egal înclinate față de sol (fig. 47).

Se întreabă sub ce unghi trebuie așezate scîndurile pentru a întrebuința *cît mai puțin* material lemnos.

Soluție. Dacă notăm cu $2a$, $2b$ dimensiunile secțiunii dreptunghulare și cu α unghiul de înclinare a unei scînduri față de sol, *suprafața minimă* a materialului lemnos va fi dată de minimul laturii $AB = y$:

$$||AB|| = ||BA'|| \cdot \cos \alpha.$$

Folosind notațiile (din fig. 47), se obține:

$$||BA'|| = ||BM|| + ||MA'|| = x + a = 2b \operatorname{ctg}\alpha + a,$$

iar funcția a cărei minim se caută va fi:

$$y = \frac{a}{\cos \alpha} + \frac{2b}{\sin \alpha}.$$

Anulînd derivata acestei funcții:

$$y' = \frac{a \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{2b \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0,$$

se va găsi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{2b : a}, \quad x = 2b : \operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{4a \cdot b^2}.$$

Observație: Dacă se consideră distanța $||BM|| = x$ ca variabilă, funcția a cărei minim se cere este:

$$y = \frac{a + x}{x} \sqrt{4b^2 + x^2},$$

a cărei derivată:

$$y' = \frac{a + x}{\sqrt{4b^2 + x^2}} - \frac{a\sqrt{4b^2 + x^2}}{x^2} = 0$$

se anulează pentru $x = \sqrt[3]{4ab^2}$, adică se obține același rezultat.

În cazul particular $a = b$, adică secțiunea este un pătrat, $x = a\sqrt[3]{4} \approx$ $\approx 1{,}587\, a$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{2}$; $\alpha = \operatorname{arc\,tg} \sqrt[3]{2} = \operatorname{arc\,tg}\ 1{,}26 \approx 51°30'$; $y = \frac{x + a}{\cos \alpha} = \frac{2{,}587\, a}{0{,}622} \approx 4{,}16\, a.$

Probleme propuse

1. Procesul de sulfurare și clorurare a compușilor organici se realizează uneori cu ajutorul luminii.

Să se determine înălțimea la care trebuie așezată sursa de lumină deasupra unei platforme circulare de rază a, unde au loc reacțiile, pentru ca iluminarea platformei să fie *maximă*, știind că intensitatea luminoasă[1]

[1] Unitatea de măsură pentru intensitatea luminoasă este candela (cd), cuvînt care în latină înseamnă luminare.

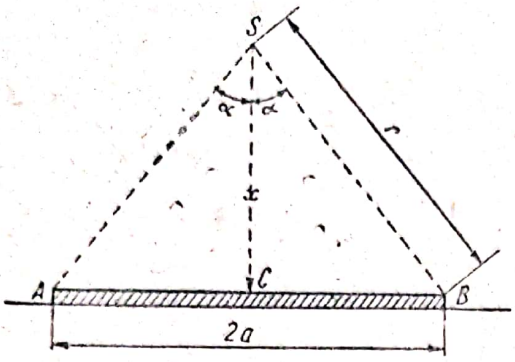


Fig. 48.

I pe direcția verticală este cunoscută, iar iluminarea[1] E este dată de formula:

$$E = (I : r^2) \cdot \cos \alpha,$$

unde α este unghiul de incidență al razelor ce cad pe această suprafață.

R. Folosind notațiile din fig. 48, se va găsi:

$$E = I \cdot x\,(x^2 + a^2)^{-3|2};$$

max E are loc pentru $x = a\sqrt{2} : 2$;
max $E = (2\sqrt{3} \cdot I) : 9\,a^2$ (lx).

În cazul particular $a = 10$ m, se va găsi $x = 7{,}07$ m.

2. Un lucrător trebuie să deplaseze o piesă de bronz pe o placă de fontă așezată pe un plan orizontal, cu ajutorul unei forțe Q.

Masa piesei fiind $P = 100$ kg, iar coeficientul de frecare dintre bronz și fontă $\mu = 0{,}2$, se cere să se determine unghiul α dintre direcția forței și planul orizontal, astfel încît forța Q necesară acestei deplasări să fie *minimă* (fig. 49).

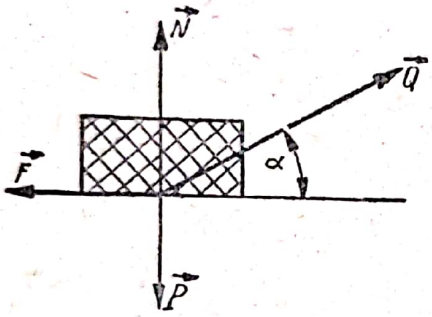


Fig. 49.

R. Din figură se constată că echilibrul forțelor $F = \mu N$, Q și P este asigurat dacă:

$$F = Q \cos \alpha,$$

$$P = N + Q \sin \alpha.$$

Funcția Q a cărei minim se caută va fi:

$$Q = \mu P : (\cos \alpha + \mu \sin \alpha).$$

Se va găsi $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\, \mu$; min $Q = \mu P : \sqrt{1 + \mu^2}$. Cu datele problemei se obține: $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}2$; $\alpha \approx 11°20'$; min $Q = 0{,}2 \cdot 100 : \sqrt{1 + 0{,}2^2} \approx 19{,}6$ kg.

3. În circuitul din figura 50, rezistențele R_1 și R_2 sînt montate în serie, iar R_3 și R_4 în paralel. Știind că $R_1 = 4\ \Omega$, $R_3 = 9\ \Omega$, să se determine rezistențele $R_2 = R_4 = x$, astfel încît intensitatea curentului care trece prin rezistența R_3 să fie *maximă*.

R. Se va găsi:

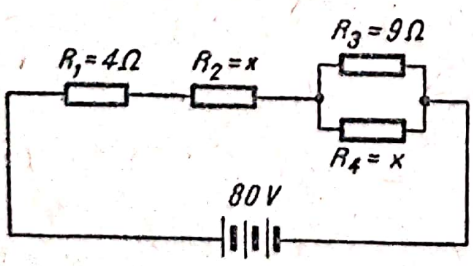


Fig. 50.

$$I_1 = I_2 = \frac{80\,(x + 9)}{x^2 + 22\,x + 36},$$

iar din legile lui Kirchhoff:

$$I_3 + I_4 = I_1;$$

$$I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0;$$

[1] **Unitatea de măsură pentru iluminare este luxul (lx) și reprezintă iluminarea produsă asupra unei suprafețe, de lumina de o candelă care cade de la distanța de 1 m, perpendicular pe o suprafață.**

Scanned with OKEN Scanner

se obține:

$$I_3 = \frac{80\,x}{x^2 + 22x + 36}; \quad I_3' = 0;$$

ne va da

$$R_2 = R_4 = x = 6\Omega; \quad \max I_3 = 2{,}35\ A.$$

4. Un cîmp electric produs de o sarcină Q este repartizat uniform pe un disc de rază R (fig. 51).

Să se determine poziția punctului M situat pe axul discului în care intensitatea cîmpului are valoarea *maximă*.

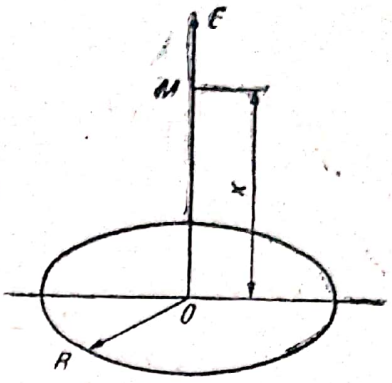


Fig. 51.

R. Intensitatea cîmpului electric E într-un punct situat pe axul inelului la distanța x de centrul lui este dat de relația:

$$E = Qx : \varepsilon\,(R^2 + x^2)^{3/2},$$

unde ε este constanta dielectrică absolută a mediului. Se va găsi:

$$x = R\sqrt{2} : 2, \quad \max E = 2Q\sqrt{3} : 9\ R^2\varepsilon.$$

5. Un rezervor avînd baza un pătrat și pereții verticali, este deschis la partea superioară. Știind că are o capacitate de 32 000 m³, să se determine dimensiunile lui astfel încît costul tablei din care este confecționat să fie *minim*.

R. Funcția a cărei minim se caută este: $S = x^2 + 4\ xy$; unde x este latura pătratului de bază iar y înălțimea rezervorului.

Cum

$$V = x^2y = 32 \cdot 10^3;$$

se obține

$$S = x^2 + 128 \cdot 10^3 : x.$$

Se va găsi:

$$x = 40\ \text{m}, \quad y = 20\ \text{m}, \quad \min S = 4800\ \text{m}^2.$$

6. Dintr-o foaie de carton dreptunghiulară de dimensiuni a,b se taie de la colțuri cîte un pătrat de latură x. Îndoind apoi dreptunghiurile rămase se obține o cutie paralelipipedică fără capac (fig. 52).

Să se determine latura x a pătratului, astfel încît capacitatea ei să fie *maximă*.

R. Funcția a cărei maxim se cere este:

$$V = x(a - 2x)(b - 2x).$$

$$V' = 12\,x^2 - 4(a + b)\,x + ab,$$

se va găsi[1]

$$x_0 = \frac{1}{6}\,(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}).$$

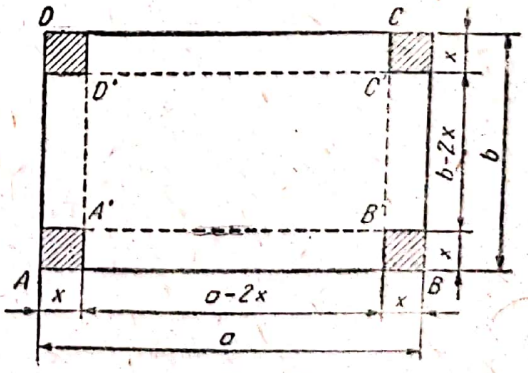


Fig. 52.

[1] Cum $V''(x_0) = -4\sqrt{a^2 + b^2 - ab} < 0$; $x_0 = \frac{1}{6}\,(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2})$ corespunde unui maxim.

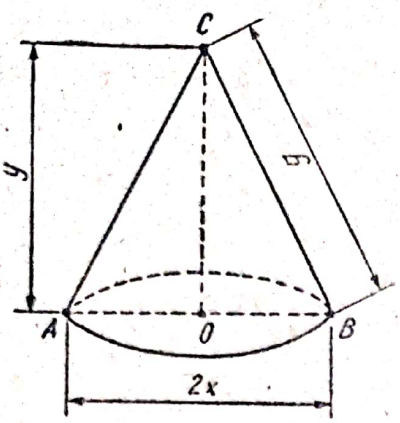


Fig. 53.

În cazul particular $b=a$, se obține $x_0=a:6$; $\max V = 2\ a^3:27$.

7. Să se determine dimensiunile unui pahar conic de capacitate dată V, astfel încît costul materialului din care este confecționat să fie minim (fig. 53).

R. Se cere $\min S=\pi x g=\pi x\sqrt{x^2+y^2}$, știind că

$$\pi x^2 y = 3V, \quad S = \pi\sqrt{x^4 + k:x^2},$$
$$k = 9V^2:\pi^2; \quad S' = 0,$$

ne conduce la:

$$x = \sqrt[3]{3\,V:\pi\sqrt{2}}; \quad y = \sqrt[3]{6\,V:\pi}; \quad y = x\sqrt{2}.$$

Înălțimea conului este egală cu latura pătratului înscris în cercul de bază al conului.

8. Se cere să se determine dimensiunile unei cutii fără capac, confecționată din tablă, cu baza un dreptunghi, de volum dat V, astfel încît costul tablei din care este confecționată cutia să fie minim. Aplicație $V = 4$ dm³.

R. **Dacă x,y,z sînt dimensiunile cutiei, funcția a cărei minim se cere este** aria $S=xy+2xz+2yz$. Condiția $V=xyz$, ne va da $S=xy+2z\,(x+y)=$ $= xy + 2V\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$.

Cum $S'_x = y - 2\ V:x^2 = 0$, $y\cdot x^2 = 2\cdot V$; $S'_y = x - 2\cdot V:y^2 = 0$; $xy^2 = 2\,V$, se obține: $x = y = \sqrt[3]{2\,V}$, $z = \sqrt[3]{V:4}$; $\min S = 3\cdot\sqrt[3]{4\,V^2}$

Aplicație. $x = y = 2$ dm, $z = 1$ dm; $\min S = 12$ dm².

9. Dintr-o foaie de tablă lată de a dm se confecționează un jgheab a cărei secțiune este un trapez. În acest scop, tabla se îndoaie în lungime pe ambele părți cu cîte o fișie de aceeași lățime, astfel ca pereții laterali să formeze cu fundul jgheabului unghiuri egale cu 60° (fig. 54).

Ce lățime trebuie să aibă fișiile îndoite, pentru ca debitul apei care se scurge prin acest jgheab să fie maxim?

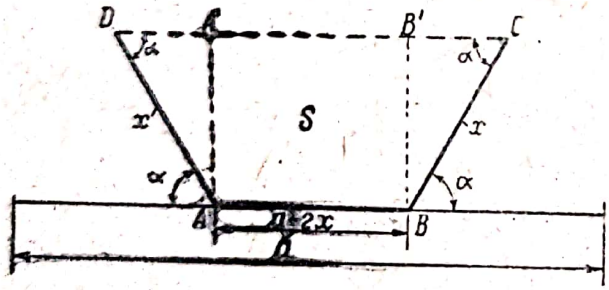


Fig. 54.

R. Debitul maxim Q se va realiza odată cu maximul secțiunii prin jgheab. Funcția a cărei maxim se caută este:

$$S(x) = ax\sin\alpha + x^2(\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\alpha).$$

Cum

$$S'(x) = a\sin\alpha + 2x\,(\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\alpha) = 0,$$

ne dă $x = a:(4 - 2\cos\alpha)$. Pentru $\alpha = 60°$ se obține

$$x = a:3; \quad \max S = a^2\cdot\sqrt{3}:12 \approx 0{,}144\ a^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

10. Să se rezolve problema 9 în ipoteza că $||AB|| = a$, $||AD|| = ||BC|| = x = b =$ constant, iar α variabil (fig. 54).

R. Funcția a cărei maxim se cere este:

$$S(\alpha) = (a + b \cos \alpha)\, b \sin \alpha.$$

$$S'(\alpha) = 2\, b^2 \cos^2 \alpha + ab \cos \alpha - b^2 = 0,$$

ne dă: $\cos \alpha = (-a \pm \sqrt{a^2 + 8\, b^2}) : 4b$. Dacă $b = a$, $\cos \alpha = -1$, $\alpha = 180°$ și conduce la un minim ($\min S = 0$); sau $\cos \alpha = 1 : 2$; $\alpha = 60°$, și conduce la un maxim[1] ($\max S = 3a^2 \sqrt{3} : 4$).

[1] $S''(\alpha) = -b(a + 4b \cos \alpha) \cdot \sin \alpha$; $S''(60°) = -b(a + 2b)\sqrt{3} : 2 < 0$; $\alpha = 60°$ corespunde unui maxim.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VI.

APLICAȚII ALE CALCULULUI INTEGRAL

§ 1. Calculul ariilor suprafețelor plane

Fie f o funcție pozitivă și continuă pe $[a, b]$. Mulțimea $S_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ a punctelor din plan mărginită de axa Ox, graficul funcției f și dreptele $x = a$, $x = b$, are arie și aria sa este egală cu

$$\text{aria } (S_f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dacă $f \leqslant 0$, atunci aria $(S_f) = -\int_a^b f(x)\,dx$, deoarece $|f| = -f$.

Exemple.

1. Să se calculeze aria mulțimii cuprinsă între graficul funcției $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ și axa Ox.

Soluție

$$\text{aria } (S_f) = \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x \cdot dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) \cdot dx = 4.$$

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi], \\ -\sin x, & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

2. Se cere aria mulțimii determinată de curba de ecuație: $y^2 \cdot (2a - x) = x^3$, $a > 0$ (numită CISOIDA LUI DIOCLES) și dreapta $x = 2a$ (fig. 55).

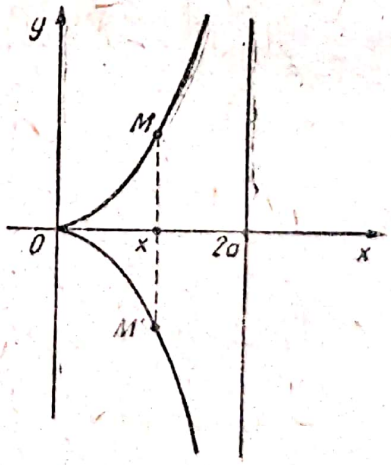


Fig. 55.

Soluție. Aria mărginită de graficul funcției $f = \sqrt{x^3 : (2a - x)}$ și un punct de abscisă x este:

$$\text{aria } (S_f) = 2\int_0^x \sqrt{\frac{x^3}{2a - x}} \cdot dx,\ x \in [0, 2a).$$

Schimbarea de variabilă prin funcţia $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to [0, 2a)$, unde $\varphi(t) = 2a \sin^2 t$, ne conduce la:

$$\text{aria } (S_f) = 16a^2 \cdot \int_0^t \sin^4 t \cdot dt = 2a^2 \left| 3t - 3 \sin t \cdot \cos t - 2 \sin^3 t \cos t \right|_0^{\pi/2} =$$

$$= 3\pi a^2.$$

3. Se cere aria mulţimii delimitată de curba de ecuaţie:

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2), \quad a > 0 \text{ (numită STROFOIDĂ)},$$

precum şi aria mulţimii determinată de curbă şi dreapta $x = a$ (fig. 56).

Soluţie. Aria buclei de strofoidă (S_f'):

$$\text{aria } (S_f') = 2 \int_{-a}^{0} x \sqrt{\frac{a + x}{a - x}}\, dx,$$

$$x \in [-a, 0].$$

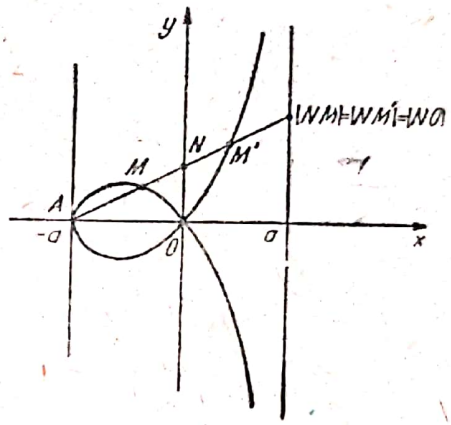


Fig. 56.

Schimbarea de variabilă prin funcţia

$$\varphi : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, -a],$$

unde $\varphi(t) = a \cos 2t$ ne conduce la:

$$\text{aria } (S_f') = 2a^2 \int_{\pi/2}^{\pi/4} (2 \cos^4 t - \cos^2 t) \cdot dt = 2a^2 \left| t + \sin t \cos t + 2 \sin t \cos^3 t \right|_{\pi/2}^{\pi/4} =$$

$$= \frac{a^2}{2}(4 - \pi).$$

Aria (S_f'') mărginită de curbă şi dreapta $x = a$.

Schimbarea de variabilă prin funcţia

$$\varphi : \left[\frac{\pi}{4}, 0\right) \to [0, a)$$

unde $\varphi(t) = a \cos 2t$, ne dă:

$$\text{aria } (S_f'') = 2a^2 \int_0^{\pi/4} (2 \cos^4 t - \cos^2 t) \cdot dt = 2a^2 \left| t + \sin t \cos t + \right.$$

$$\left. + 2 \sin t \cos^3 t \right|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}(4 + \pi).$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. Volumul corpurilor de rotaţie

Fie f o funcţie continuă, definită pe un interval $[a, b]$, şi A mulţimea cuprinsă între curba $y = f(x)$, axa Ox şi dreptele $x = a$, $x = b$ (fig. 57 *a*, *b*).

Volumul V al corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a acestei mulţimi este dat de integrala:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Exemple

1. Un turn de răcire de la o centrală termoelectrică are forma unui hiperboloid de rotaţie[1] (fig. 58).

Folosind dimensiunile din figură (date în metri) se cere:

— volumul părţii interioare;

— diametrul deschiderii superioare.

Soluţie. Deoarece volumul interior al turnului se obţine prin rotirea mulţimii H delimitată de arcul de hiperbolă CM (a cărei ecuaţie este $x^2 : 36 - 3y^2 : 625 = 1$) şi de dreptele $y = 5$, $y = -25$ în jurul axei Oy, avem

$$V = \pi \int_{-25}^{5} x^2(y)\, dy = 36\pi \int_{-25}^{5} \left(1 + \frac{3y^2}{625}\right) dy = 36\pi \left| y + \frac{y^3}{625} \right|_{-25}^{5} = 1987{,}2\,\pi.$$

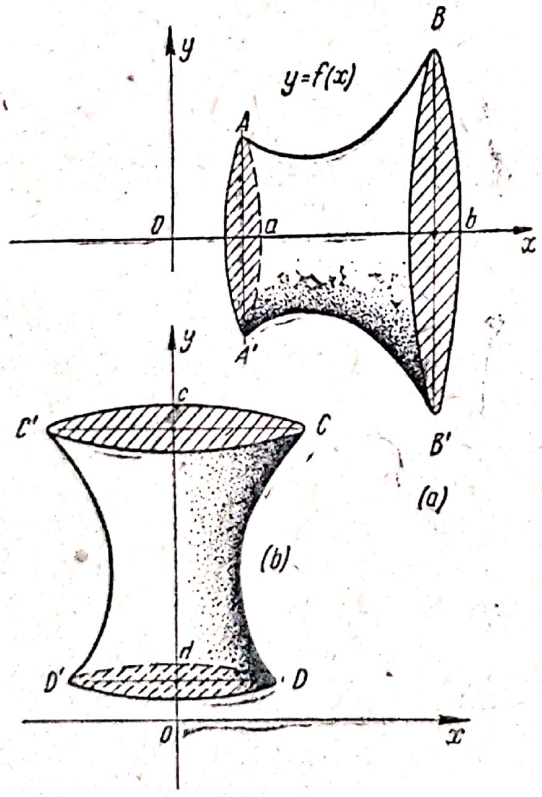


Fig. 57.

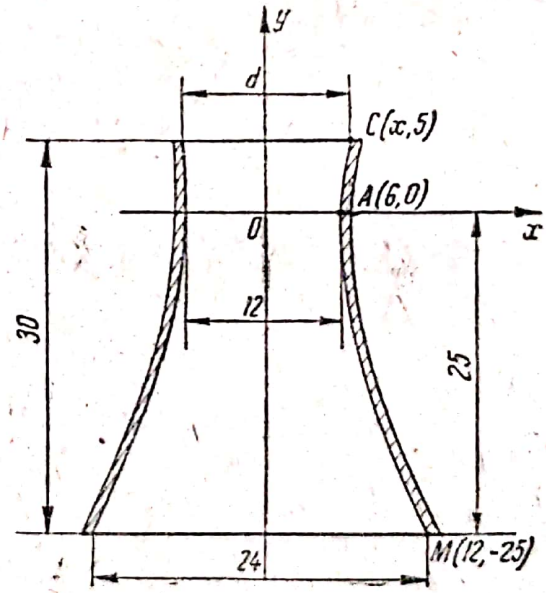


Fig. 58.

[1] Corpul obţinut prin rotaţia unei hiperbole în jurul uneia din axe.

Diametrul deschiderii superioare se obține calculînd abscisa punctului C, a cărui ordonată este $y = 5$.

Folosind ecuația hiperbolei, găsim:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{3 \cdot 25}{625} = 1, \quad x^2 = 36\left(1 + \frac{3}{25}\right), \quad x = 2{,}4\sqrt{7} \approx 6{,}35. \; d = 12{,}70 \text{ m}.$$

Observație. Pentru a obține ecuația hiperbolei, se pune condiția ca punctele $A(6,0)$ și $M(13, -25)$ să fie situate pe curbă.

Se obține sistemul:

$$\frac{36}{a^2} = 1; \quad \frac{144}{a^2} - \frac{625}{b^2} = 1; \quad a^2 = 36; \quad b^2 = \frac{625}{3}.$$

2. Un cazan în formă cilindrică se termină cu un segment de paraboloid (fig. 59), generat de parabola:

$$y = \frac{h}{d^2} \cdot x^2.$$

Se cere:

a. lungimea z, a cazanului (partea cilindrului);

b. aria secțiunii axiale a cazanului, s;

c. volumul cazanului, știind că $h = 4$ m, $d = 1$ m.

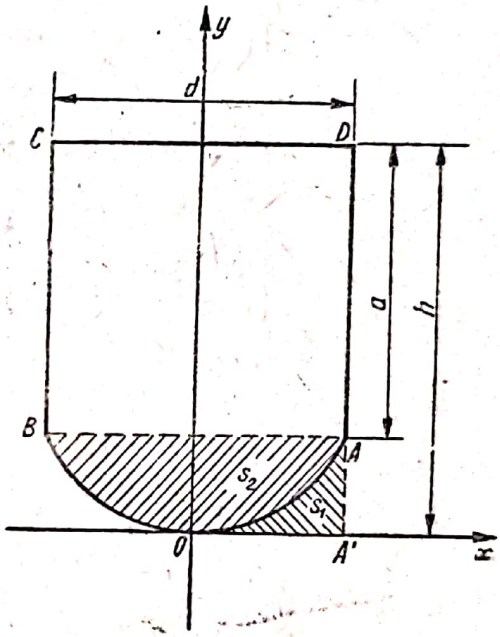


Fig. 59.

Soluție:

a. Valoarea lui a se obține din ecuația parabolei, știind că punctul A se află pe parabolă:

$$y = \frac{h}{d^2} \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{h}{4},$$

$$a = h - \frac{h}{4} = \frac{3h}{4}.$$

b. Aria mulțimii s_1 mărginită de arcul de parabolă OA, axa Ox și ordonata AA' este:

$$\text{Aria } (s_1) = \frac{h}{s^2} \int_0^{d/2} x^2 \, dx = \frac{hd}{24}.$$

Aria (s_2) mărginită de arcul de parabolă AOB și dreapta AB este:

$$\text{Aria } (s_2) = ||SB|| \cdot ||AA'|| - 2s_1 = d \cdot \frac{h}{4} - 2 \cdot \frac{hd}{24} = \frac{hd}{6}.$$

Aria (s_3) a dreptunghiului $ABCD$ este:

$$\text{Aria } (s_3) = d\left(h - \frac{h}{4}\right) = \frac{3}{4} hd, \quad s = s_2 + s_3 = \frac{hd}{6} + \frac{3hd}{4} = \frac{11}{12} hd \text{ m}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

c. Dacă notăm cu V_1 și V_2 volumul segmentului de paraboloid și al cilindrului, se obține:

$$V_1 = \pi \int_0^{h/4} x^2(y)\, dy = \pi \frac{d^2}{h} \int_0^{\pi/4} y\, dy = \pi \frac{d^2 h}{32}, \quad V_2 = \frac{3\pi d^2 h}{16}.$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi d^2 h}{32} + \frac{3\pi d^2 h}{16} = \frac{7\pi d^2 h}{32}.$$

În cazul particular dat ($h = 4$ m, $d = 1$ m):

$$s = \frac{11}{3}\ \text{m}^2, \quad V = \frac{7\pi}{8} \approx 2{,}747\ \text{m}^3.$$

3. În figura 60 se poate vedea secțiunea axială a unei *babale* (o piesă turnată din fontă, de care se fixează otgoanele vapoarelor ancorate în port).

Curbele laterale ale secțiunii axiale sînt ramuri de hiperbolă, iar partea de sus a babalei se termină cu o jumătate de elipsă (fig. 60).

Să se calculeze masa întregii babale, știind că este făcută din fontă ($\gamma = 7{,}1$ kg/dm^3).

Soluție. Vom calcula pe rînd volumele determinate prin rotirea mulțimii mărginită de arcul de hiperbolă AD, dreptele $y = 0$, $y = 3$ în jurul axei Oy, apoi volumul obținut prin rotirea mulțimii mărginită de arcul de elipsă AC, dreptele $x = 0$, $x = 1$ în jurul axei Ox, precum și volumul cilindrului.

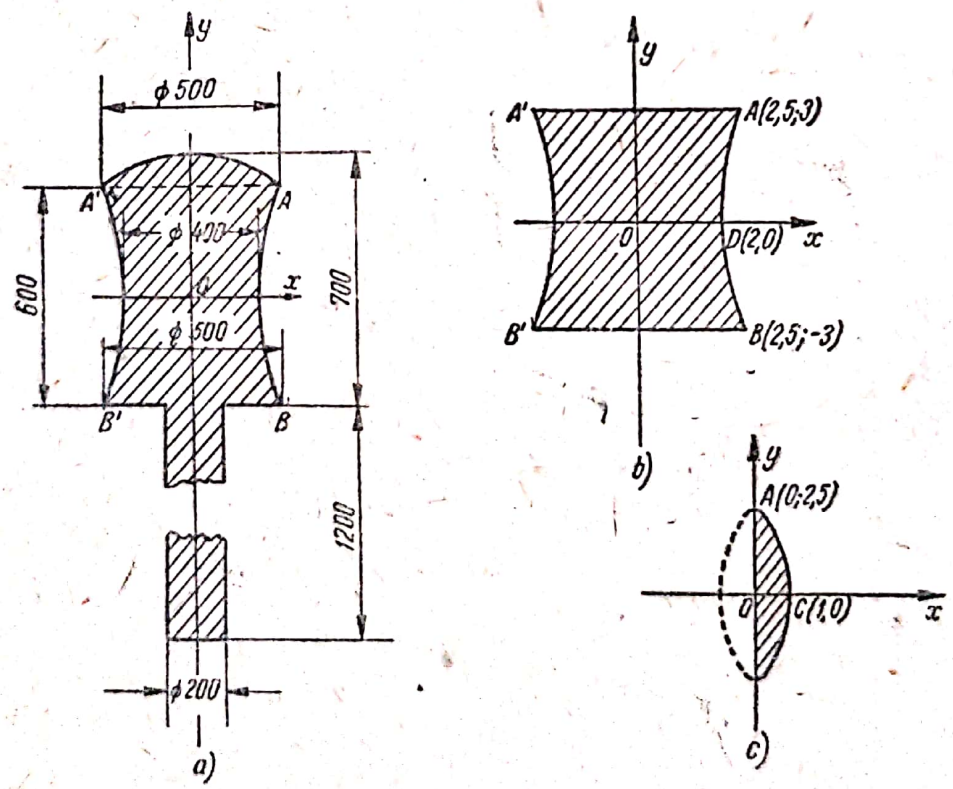


Fig. 60.

— *Volumul* (V_1) *determinat de arcul de hiperbolă* AD.

Dimensiunile din figura 60,*a* au fost transformate în decimetri în fig. 60,*b* și *c*. Se deduce ecuația hiperbolei știind că trece prin punctele $A(2,\ 5\ ;\ 3)$, $D(2,0)$ $x^2 : 4 - y^2 : 16 = 1\ ;\ x^2 = 4(1 + y^2 : 16)$

$$V_1 = 2\pi \cdot \int_0^3 4\left(1 + \frac{y^2}{16}\right) dx = \frac{57}{2}\pi.$$

— *Volumul* (V_2) *determinat de arcul de elipsă* AC.

Se deduce ecuația elipsei știind că trece prin punctele $A(0\ ;\ 2{,}5)$, $C(1,0)$: $x^2 : 1 + y^2 : 6{,}25 = 1\ ;\ y^2 = 6{,}25\ (1 - x^2)$

$$V_2 = \pi \cdot \int_0^1 6{,}25\ (1 - x^2) \cdot dx = \frac{12{,}5\pi}{3}.$$

— *Volumul cilindrului* : $V_3 = \pi r^2 h = 12\pi$.

Masa întregii babale va fi :

$$G = V \cdot \gamma = (V_1 + V_2 + V_3)\,\gamma = \left(\frac{57\pi}{2} + \frac{12{,}5\pi}{3} + 12\pi\right)\gamma =$$

$$= \frac{134}{3}\pi\gamma \approx 995{,}6 \text{ kg}.$$

4. Inelul cilindric[1] a cărui formă se poate vedea în fig. 61 este foarte des folosit în tehnică, ca piesă componentă a diferitelor mașini (garnituri sau manșon).

Să se calculeze masa unui inel cilindric ale cărui dimensiuni sînt $r=2$ cm, $R=12$ cm, știind că este confecționat din oțel ($\gamma = 7{,}8$ kg/dm^3).

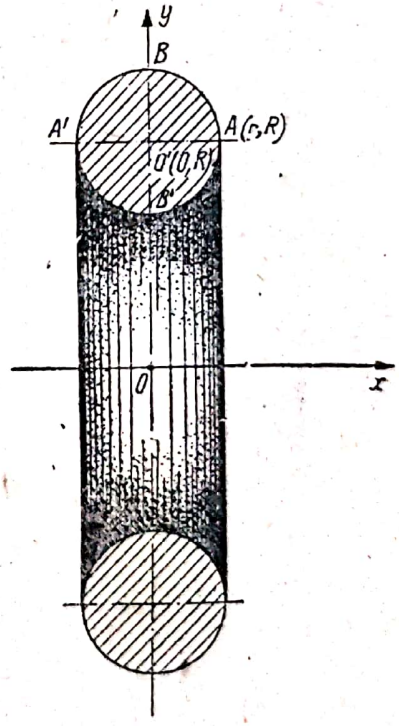


Fig. 61.

Soluție. Ecuația cercului cu centrul în $O'(0,\ R)$ și cu raza r este :

$$x^2 + (y - R)^2 = r^2$$

Dacă notăm cu y_1 și y_2 ecuațiile celor două semicercuri ABA', respectiv $AB'A'$, se obține :

$$y_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2},\ y_2(x) =$$

$$= R - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

[1] Secțiunea într-un inel cilindric poate fi un cerc sau o elipsă. În anumite cazuri speciale el poate avea ca secțiune o figură oarecare a cărei formă depinde de scopul pentru care este confecționat.

Volumul (V) al inelului este dat de:

$$V = 2\pi \int_0^r (y_1^2 - y_2^2) \cdot dx = 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx = 2\pi^2 r^2 R.$$

În cazul particular dat, masa inelului va fi: $G = 7{,}4$ kg.

Observaţie. Volumul inelului[1] se poate obţine şi cu ajutorul teoremei lui Guldin[2]:

Volumul (V) al corpului obţinut prin rotaţia unei suprafeţe plane în jurul unei axe situată în planul său şi pe care nu o taie, este egal cu produsul dintre aria acelei suprafeţe (A) şi lungimea cercului descris de centrul de greutate al suprafeţei:

$$V = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot A.$$

În cazul inelului $||GG'|| = ||OO'|| = R$, iar $A = \pi r^2$, $V = 2\pi \cdot R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R$, se obţine acelaşi rezultat.

5. Un inel are secţiunea o elipsă (fig. 62). Să se determine masa unui astfel de inel, ştiind că are dimensiunile $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, $R = 40$ cm şi este confecţionat din alamă $(\gamma = 8{,}5$ kg/dm$^3)$.

Soluţie. Ecuaţia elipsei cu centrul în $O'(0, R)$ şi cu semiaxele a, b, este:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - R)^2}{b^2} = 1.$$

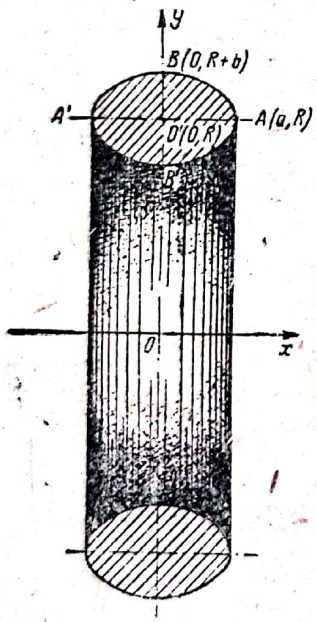


Fig. 62.

Dacă notăm cu y_1 şi y_2 ecuaţiile celor două arce de elipsă ABA' şi $AB'A'$, se obţine:

$$y_1 = R + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y_2 = R - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$V = V_1 - V_2 = 2\pi \int_0^a (y_1^2 - y_2^2)\, dx =$$

$$= \frac{8\pi R b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2\pi^2 a b R$$

iar masa inelului $G = 2\pi^2 a b R \gamma \approx 322$ kg.

---

[1] Suprafaţa generată de un cerc care se roteşte în jurul unei axe situate în planul lui, dar care nu-l intersectează se numeşte tor.

[2] Guldin Paul (1577–1643), matematician francez.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie. Dacă folosim teorema lui Guldin, volumul se obţine direct cu ajutorul formulei:

$$V = L_c \cdot s,$$

unde

$$L_c = 2\pi R,$$

iar $s = \pi ab$ (aria elipsei de semiaxe a, b).

Se obţine:

$$V = 2\pi R \cdot \pi ab = 2\pi^2 abR \approx 19{,}739\ abR.$$

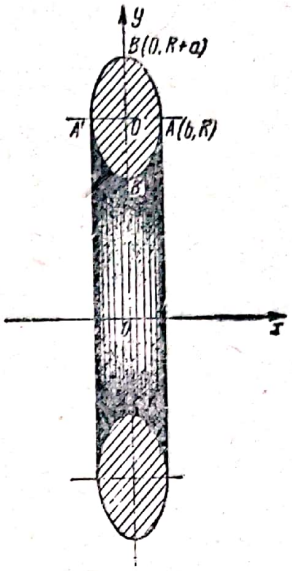


Fig. 63.

6. Să se determine masa unui inel (fig. 63) a cărui secţiune este o elipsă de semiaxe $a = 2$ cm, $b = 4$ cm, ştiind că raza $R = 20$ cm şi este confecţionat din aluminiu ($\gamma = 2{,}5$ kg/dm³).

R. Se va folosi procedeul de la problema 5; se va găsi $G = 7{,}895$ kg.

Volumul butoaielor

1. *Vase cu formă parabolică.* Dacă doaga AA' are forma unui arc de parabolă, o jumătate din vas va avea forma unui trunchi de paraboloid cu razele: $||AA|| = r$, $||BE|| = R$, iar distanţa dintre baze $||DE|| = h/2$ (fig. 64).

Soluţie. Pentru a obţine volumul unui trunchi de paraboloid de rotaţie, vom scrie ecuaţia parabolei care trece prin punctele $A(0,r)$ şi $B(l,R)$. Pornind de la ecuaţia parabolei scrisă sub forma $y^2 = 2px + c$, se determină constantele p şi c, punînd condiţia ca, coordonatele lui A şi B să verifice ecuaţia acestei parabole (fig. 65).

Rezolvînd sistemul: $r^2 = c$; $R^2 = 2p + c$; găsim:

$$c = r^2;\ 2p = (R^2 - r^2) : l,$$

şi deci ecuaţia parabolei va fi:

$$y^2 = (R^2 - r^2)\, x : l + r^2.$$

Folosind formula care dă volumul de rotaţie determinat de ecuaţia parabolei găsim:

$$V_1 = \pi \int_0^l y^2 dx = \pi \int_0^l [(R^2 - r^2)\, x : l + r^2] \cdot dx = \frac{\pi l}{2}(R^2 + r^2).$$

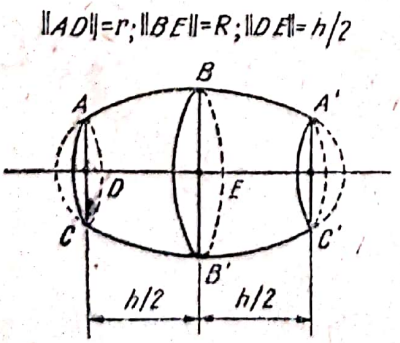


Fig. 64.

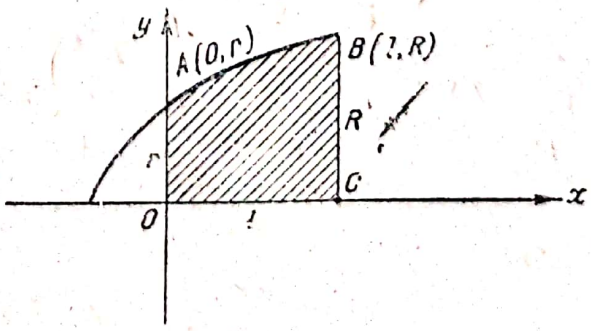


Fig. 65.

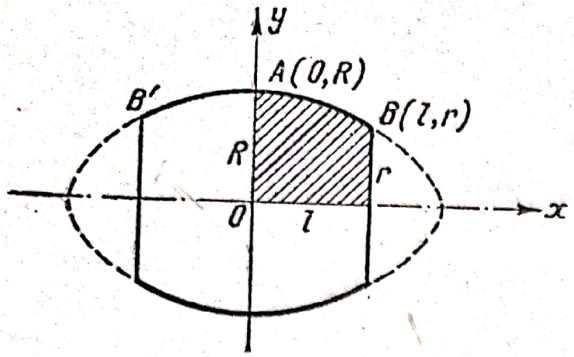


Fig. 66.

Cum $R = D:2$, $r = d:2$ și $l = h:2$, volumul butoiului va fi:

$$V = 2V_1 = \frac{\pi}{8}(D^2 + d^2)h.$$

2. *Vase de formă elipsoidală.* Se consideră vasul compus din două trunchiuri de elipsoid de rotație cu bazele lipite. În acest caz, doagele sînt arce de elipsă. Trunchiul de elipsoid se obține prin rotirea arcului de elipsă AB în jurul axei mari a elipsei (fig. 66).

Pentru a calcula volumul, se determină mai întîi ecuația elipsei raportată la axele sale și care trece prin punctele $A(0,R)$ și $B(l,r)$ și se obține rezolvînd sistemul:

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1\,;\ \frac{R^2}{b^2} = 1\,;\quad a^2 = \frac{l^2R^2}{R^2 - r^2}\,;\ b^2 = R^2.$$

Ecuația elipsei va fi:

$$\frac{x^2(R^2 - r^2)}{l^2 \cdot R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1\,;\ y^2 = R^2 - \frac{(R^2 - r^2)}{l^2} \cdot x^2.$$

Folosind formula care dă volumul de rotație găsim:

$$V = \pi \int_0^l y^2 dx = \frac{\pi l}{3}(2R^2 + r^2) = \frac{\pi h}{12}(2D^2 + d^2).$$

3. *Vase cu formă circulară.* Doagele sînt formate din arce de cerc de rază egală cu lungimea butoiului. Corzile acestor arce sînt laturile unui hexagon înscris în cercul de rază D (fig. 67).

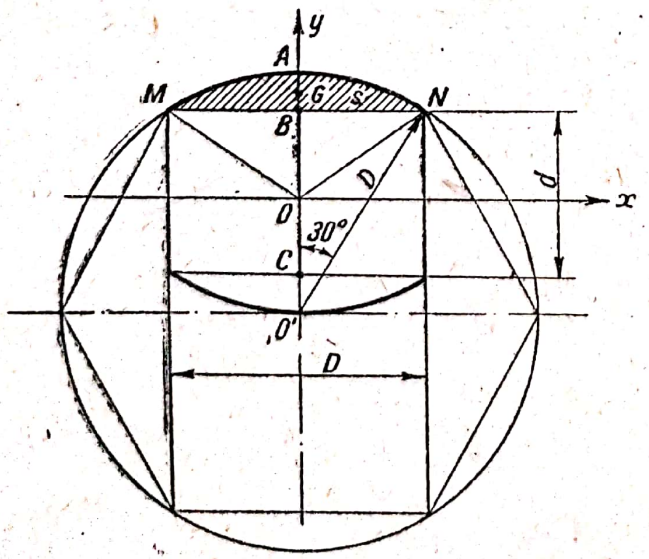


Fig. 67.

În aceste condiții $h = d$, iar d se poate exprima în funcție de D. Din figură se constată că:

$$d = ||BC|| = ||O'A|| -$$

$$- 2\,||AB|| = ||O'A|| -$$

$$- 2\,(||O'A|| - ||O'B||) =$$

$$= 2\,||O'B|| - ||O'A|| =$$

$$= 2 \cdot \frac{D\sqrt{3}}{2} - D = D(\sqrt{3} - 1).$$

Aria (s) a suprafeței segmentului circular haşurat este

Scanned with OKEN Scanner

a șasea parte din diferența dintre aria cercului și a exagonului regulat înscris în acest cerc. Rezultă:

$$s = \frac{1}{6}\left(\pi D^2 - 6 \cdot \frac{D}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}D\right) =$$

$$= \frac{1}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})\,D^2.$$

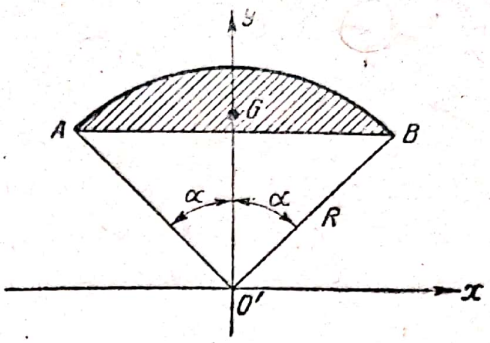


Fig. 68.

Dacă notăm cu V_1 volumul obținut din rotația segmentului circular de arie s în jurul axei Ox, teorema lui Guldin ne permite să scriem:

$$V_1 = 2\pi\,||OG||\,s.$$

Cum ordonata centrului de greutate al unui segment circular este dată de formula[1]:

$$||O'G|| = \frac{4R\sin^3\alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)},$$

pentru $R = D$ și $\alpha = \pi/6$ din figurile 67 și 68 se obține:

$$||O'G|| = \frac{4D\sin^2\frac{\pi}{6}}{3\left(2\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{D}{2\pi - 3\sqrt{3}}.$$

Cum

$$||OG|| = ||O'G|| - ||OO'|| = \frac{D}{2\pi - 3\sqrt{3}} - \frac{D}{2} =$$

$$= \frac{D(2 - 2\pi + 3\sqrt{3})}{2(2\pi - 3\sqrt{3})},$$

$$V_1 = 2\pi \cdot s \cdot ||OG|| = \frac{\pi D^3}{12}(2 - 2\pi + 3\sqrt{3}).$$

La acest volum trebuie să adăugăm volumul cilindrului V_2 cu înălțimea D, ale cărui baze (fundurile butoiului) au diametrul $d = (\sqrt{3} - 1)\,D$:

$$V_2 = \frac{\pi}{4}(\sqrt{3} - 1)^2 \cdot D^3 = \frac{\pi}{2}(2 - \sqrt{3})\,D^3.$$

Volumul butoiului va fi:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi D^3}{12}(14 - 2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0{,}66\ D^3.$$

[1] Dedusă la § 5. *Determinarea centrelor de greutate.*

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie. Volumul (V) al butoiului din figura 67 se poate obţine prin rotirea mulţimii determinată de arcul MAN, dreptele $x = a$, $x = D/2$, în jurul axei Ox. Ecuaţia cercului cu centrul $O'\left(0, -\frac{D}{2}\right)$ şi de rază D, din care face parte arcul MAN este $x^2 + (y + D/2)^2 = D^2$. Se deduce:

$$y^2 = \frac{5}{4} D^2 - x^2 - D\sqrt{D^2 - x^2}.$$

$$V = 2\pi \int_0^{D/2} y^2(x)\, dx = 2\pi \int_0^{D/2} \left[\frac{5}{4} D^2 - x^2 - D\sqrt{D^2 - x^2}\right] dx.$$

$$V = \frac{\pi D^3}{12}(14 - 2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0{,}66\ D^3.$$

Rezultatul obţinut este acelaşi. Metoda folosită necesită calculul unor integrale simple, în schimb nu mai este necesară cunoaşterea teoremei lui Guldin şi nici determinarea coordonatelor centrului de greutate.

Probleme propuse

1. Se cere volumul unui butoi, ştiind că doaga ABA' (fig. 64) este formată din două arce de hiperbolă racordate în B.

R. Se va scrie ecuaţia hiperbolei care trece prin punctele $A(0, r)$ şi $B(l, r)$.

2. Să se calculeze volumul unui butoi, ştiind că doagele au forma unui arc de sinusoidă generalizată $(y = a \sin x)$, iar lungimea butoiului este $2\pi/3$ (fig. 69).

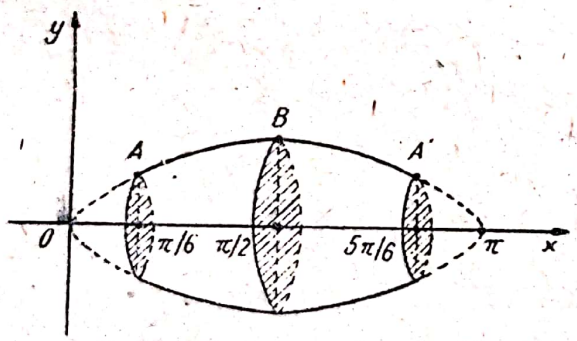


Fig. 69.

R. $V = 2\pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} y^2 dx =$

$$= 2\pi a^2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^2 x\ dx;$$

$$\alpha_1 = \pi/6,\ \alpha_2 = \pi/2.$$

Se va găsi:

$$V = \pi a^2 (4\pi + 3\sqrt{3}) : 12.$$

3. Se cere capacitatea unei pîlnii generată prin rotirea mulţimii determinată de graficul funcţiei $y = x \ln x$; $x \in (0, +\infty)$. dreptele $x = 1$, $x = e$, în jurul axei Ox.

$$V = \pi \int_1^e x^2 \cdot \ln^2 x\ dx = \frac{\pi}{3} \left| x^3 \left(\ln^2 x - \frac{2}{3} \ln x + \frac{2}{9}\right)\right|_1^e = \frac{\pi}{27}(5e^3 - 2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie. Volumul (V_1) al corpului generat prin rotirea mulţimii determinată de graficul funcţiei în jurul axei Ox, şi dreptele $x = 0$, $x = 1$, este:

$$V_1 = \pi \int_0^1 x^2 \cdot \ln^2 x \, dx = \frac{\pi}{3} \left| x^3 \left(\ln^2 x - \frac{2}{3} \ln x + \frac{2}{9} \right) \right|_0^1 = \frac{2\pi}{27},$$

deoarece $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \cdot \ln^2 x = 2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} x^3 \cdot \ln x = 2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} (-x^3 : 3) = 0.$

§ 3. Lungimea graficului unei funcţii

Dacă funcţia $f: [a, b] \to R$ este continuă şi derivabilă cu derivata continuă, atunci lungimea graficului acestei funcţii este:

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

Exemple

1. Să se determine lungimea unui cablu metalic suspendat în două puncte fixe A, B situate la aceeaşi înălţime faţă de sol, ştiind că $||OA'|| = ||OB'|| = c, ||OM|| = a$ (fig. 70).

Soluţie. Cablul suspendat în punctele A şi B va avea forma unui „lănţişor" a cărei ecuaţie este:

$$f(x) = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}),$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (e^{x/a} - e^{-x/a}),$$

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \frac{1}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}).$$

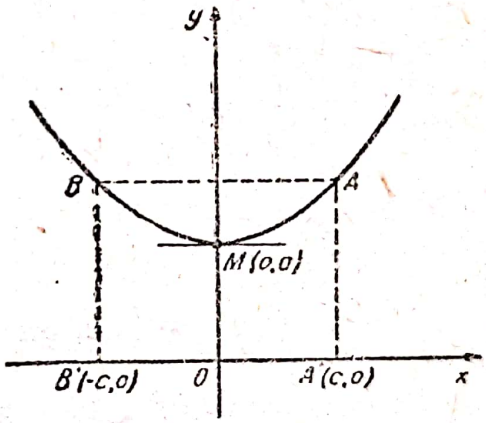


Fig. 70.

$$L = \int_0^c (e^{x/a} + e^{-x/a}) \, dx = a \left| e^{x/a} - e^{-x/a} \right|_0^c = a (e^{c/a} - e^{-c/a}).$$

În cazul particular $a = c = 1$ m. $L = e - e^{-1} \approx 2{,}718 - 0{,}367 = 2{,}351$.

2. Se cere lungimea arcului de curbă a cărui grafic este definit de ecuaţia $y = (1 + \sqrt{1 + 8x}) : 4$, cuprinsă între punctele $A\,(0,1/2)$, $B\,(1,1)$.

Soluţie. Cum $y' = 1 : \sqrt{1 + 8x}$; $L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{1 + 8x}} \, dx$. Schimbarea

de variabilă prin funcția $\varphi : [1,9] \to [0,1]$, unde $\varphi(t) = (t-1) : 8$, ne conduce la integrala:

$$L = \frac{1}{8}\int_1^9 \frac{t+1}{\sqrt{t^2+t}}\,dt = \frac{1}{16}\int_1^9 \frac{2t+1}{\sqrt{t^2+t}}\,dt + \frac{1}{16}\int_1^9 \frac{dt}{\sqrt{t^2+t}} = \frac{1}{8}\sqrt{t^2+t} +$$

$$+ \frac{1}{16}\ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t}\right)\Big|_1^9 = \frac{1}{8}(3\sqrt{10}-\sqrt{2}) +$$

$$+ \frac{1}{16}\ln\frac{19+6\sqrt{10}}{3+2\sqrt{2}}.$$

3. Se dă funcția: $x = f(y) = a \cdot \ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$.

Se cere lungimea graficului funcției f: $[a, b] \to R$. Caz particular $a = e$, $b = e^3$.

Soluție. Se obține succesiv:

$$x'(y) = -\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y};$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+x'^2(y)}\cdot dy = \int_a^b \sqrt{1+\frac{a^2-y^2}{y^2}}\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{a}{y}\,dy = a\ \ln y\Big|_a^b = a\cdot\ln\frac{b}{a} = a\,(\ln b - \ln a).$$

În cazul particular dat, $L = e\,(\ln e^3 - \ln e) = 2e$.

§ 4. Calculul ariilor suprafețelor de rotație

Dacă f: $[a, b] \to \mathbf{R}^+$ este o funcție continuă și derivabilă, cu derivată continuă, atunci suprafața obținută prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox (fig. 71) este:

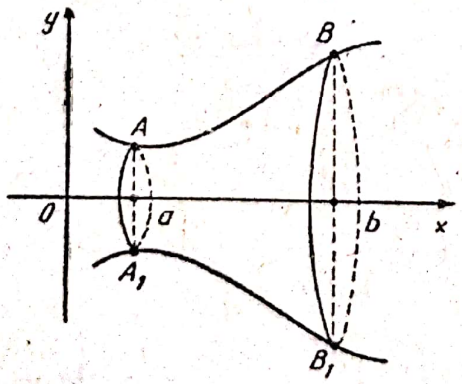


Fig. 71.

$$A_{Ox}(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx, \qquad (4)$$

iar dacă

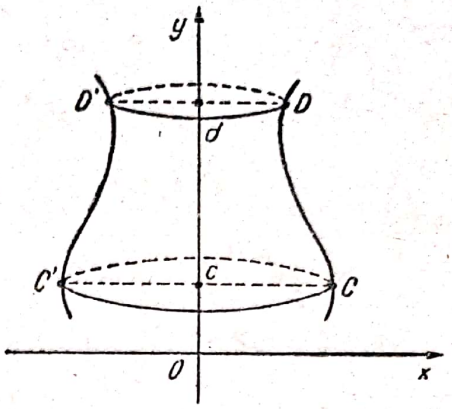
$$\varphi : [c, d] \to \mathbf{R}^+$$

este continuă și derivabilă, cu derivata continuă, atunci aria suprafeței obținută

Scanned with OKEN Scanner

prin rotirea graficului funcției $\varphi(y)$ în jurul axei Oy (fig. 72) este:

$$A_{Oy} = 2\pi \int_c^b \varphi(y) \cdot \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2}\, dy.$$



Rig. 72.

Exemple

1. Se cere aria suprafeței obținută prin rotirea elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

în jurul axei Oy. Corpul astfel obținut (fig. 73) este un elipsoid de rotație (poartă și numele de SFEROID).

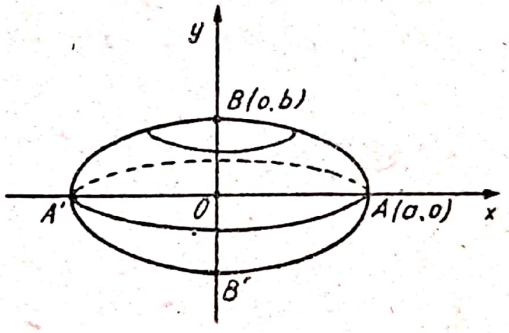


Fig. 73.

Soluție. Explicitînd ecuația elipsei în raport cu variabila y se obține:

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}; \quad x' = \frac{-ay}{b\sqrt{b^2 - y^2}};$$

$$\sqrt{1 + x'^2} = \sqrt{\frac{b^4 + y^2(a^2 - b^2)}{b^2(b^2 - y^2)}}$$

$$A = 2\pi \int_{-b}^{b} x\sqrt{1 + x'^2}\, dy = \frac{2\pi a}{b^2} \int_{-b}^{b} \sqrt{b^4 + c^2y^2}\, dy; \text{ unde } c^2 = a^2 - b^2.$$

$$A = \frac{\pi a}{b^2}\left| y\sqrt{b^2 + c^2y^2} + \frac{b^4}{c} \cdot \ln\left(cy + \sqrt{b^4 + c^2y^2}\right)\right|_{-b}^{+b}.$$

$$A = 2\pi a\left(a + \frac{b^2}{2c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right).$$

Observație. Dacă $b = a$; $c^2 = a^2 - a^2 = 0$.

$$\lim_{c\to 0}\frac{b^2}{2c}\ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right) = \frac{b^2}{2}\lim_{c\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right)}{c} = \frac{b^2}{2}\cdot\frac{0}{0}.$$

$$\cdot \lim_{c\to 0}\frac{\left(\frac{a+c}{a-c}\right)}{\left(\frac{a+c}{a-c}\right)} = \lim_{c\to 0}\frac{2a}{a^2 - c^2} = \frac{2}{a}.$$

$$A = 2\pi a\left(a + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{2}{a}\right) = 2\pi a\,(a + a) = 4\pi a^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

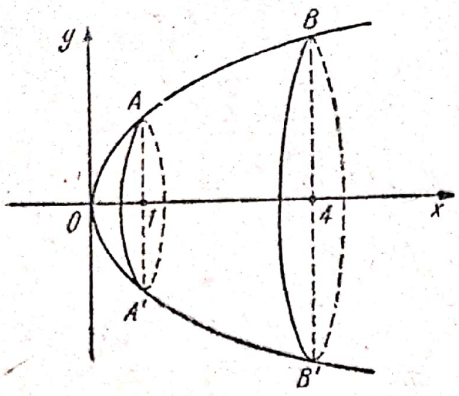


Fig. 74.

2. Să se afle aria oglinzii parabolice obținută prin rotirea parabolei $4y^2 = 9x$; $x \in [0, 1]$, în jurul axei Ox (fig. 74).

Soluție. Se obține succesiv:

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{x};$$

$$y' = \frac{3}{4\sqrt{x}};$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{16 \cdot x}}.$$

$$A = 2\pi \int_0^1 y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \frac{3\pi}{4} \int_0^1 \sqrt{16x + 9}\,dx.$$

Schimbarea de variabilă prin funcția $\varphi : [3, 5] \to [0, 1]$, unde $\varphi(t) = (t^2 - 9) : 16$, ne conduce la:

$$A = \frac{3\pi}{32} \int_3^5 t^2 dt = \frac{\pi}{32} \left| t^3 \right|_3^5 = \frac{49}{16}\pi.$$

3. Se cere aria suprafeței obținută prin rotirea „astroidei" în jurul axei ox (fig. 75).

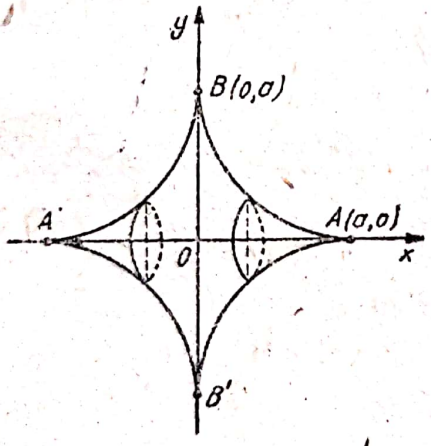


Fig. 75.

Soluție. Explicitînd ecuația „astroidei"

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2},$$

în funcție de x se obține:

$$y = (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2})^{3/2};$$

$$y' = \frac{(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2})^{1/2}}{\sqrt[3]{x}};$$

$$y'^2 = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}};$$

$$y \cdot \sqrt{1 + y'^2} = (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2})^{3/2} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{x}} = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}.$$

$$A = 4\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\,dx.$$

Schimbarea de variabilă prin

$$\varphi : [a^{2/3}, 0] \to [0, a],$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\varphi(t) = (a^{2/3} - t)^{3/2}$, ne conduce la:

$$A = -6\pi a^{\frac{1}{3}} \int_{a^{2/3}}^{0} t^{3/2} dt = 6\pi a^{1/3} \left| t^{5/2} \right|_{0}^{a^{2/3}} = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

Observaţie. Cum aria sferei de rază a este $A_s = 4\pi a^2$, avem relaţia:

$$\frac{A}{A_s} = \frac{12\pi a^2}{5 \cdot 4\pi a^2} = \frac{3}{5}; \quad A = \frac{3}{5} A_s.$$

§ 5. Determinarea centrelor de greutate

Centrul de greutate G, al unui sistem de puncte materiale este punctul de aplicaţie al rezultantei tuturor forţelor de atracţie gravitaţională care acţionează asupra acelui sistem.

Determinarea centrelor de greutate ale curbelor, suprafeţelor sau corpurilor prezintă în practică o importanţă deosebită.

În cele ce urmează vom determina centrul de greutate al unor plăci plane şi omogene.

O placă plană este omogenă, dacă masa oricărei porţiuni din ea este egală cu produsul dintre o constantă pozitivă (numită masa specifică) şi aria suprafeţei acelei porţiuni.

Dacă o placă plană este delimitată de graficul funcţiei $y=f(x)$ continuă pe intervalul $[a, b]$, de dreptele $x = a$, $x = b$ şi axa Ox, coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G)$ ale acestei plăci (fig. 76) sînt:

$$x_G = \frac{1}{S} \int_a^b x f(x)\, dx; \quad y_G = \frac{1}{2S} \int_a^b f^2(x)\, dx; \tag{5}$$

unde S este aria suprafeţei $ABba = \int_a^b f(x)\, dx$.

Dacă o placă plană este delimitată de graficile funcţiilor $f(x)$ şi $g(x)$ continue pe intervalul $[a, b]$ şi de dreptele $x = a$, $x = b$ (fig. 77),

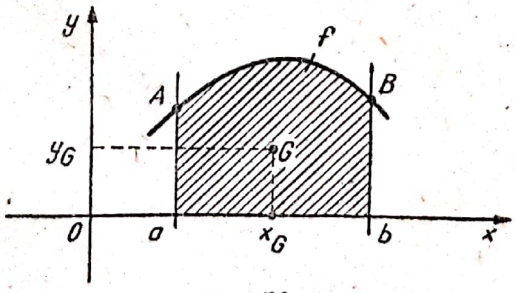


Fig. 76.

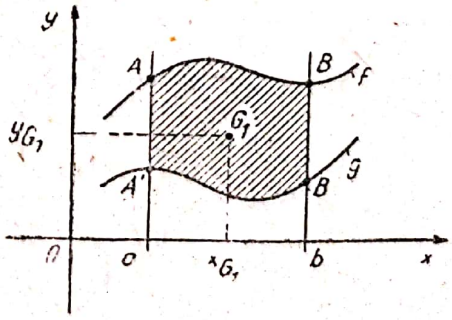


Fig. 77.

coordonatele centrului de greutate $G_1(x_{G_1}, y_{G_1})$ al acestei plăci sînt:

$$x_{G_1} = \frac{1}{S_1}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx\,;\quad y_{G_1} = \frac{1}{2S_1}\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx\,; \qquad (6)$$

unde S_1 este aria suprafeței $ABB'A' = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$.

Exemple

1. Centrul de greutate a unei plăci plane, mărginită de un arc de cerc, axa Ox și dreptele $x = R\sin\alpha$, $x = -R\sin\alpha$. Aria haşurată din figura 78.

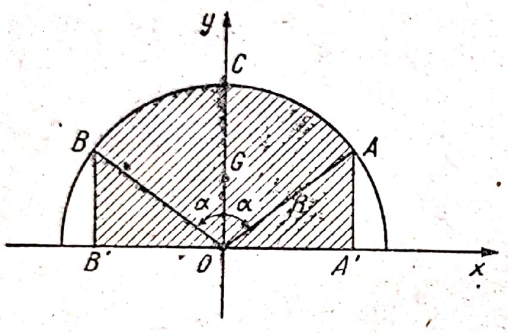


Fig. 78.

Soluție. Folosind notațiile din figură se obține:

$$x_G = 0,$$

$$y_G = \frac{1}{2S}\int_{-R\sin\alpha}^{R\sin\alpha} (R^2 - x^2)\,dx = \frac{I(\alpha)}{2S}.$$

$$I(\alpha) = \int_{-R\sin\alpha}^{R\sin\alpha} (R^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \left| R^2x - \frac{x^3}{3} \right|_{-R\sin\alpha}^{R\sin\alpha} = \frac{2}{3}R^3\sin\alpha\,(3 - \sin^2\alpha).$$

Aria S = aria sect. (AOB) + 2 aria $\triangle AA'O = R^2\alpha + \frac{R^2\sin 2\alpha}{2}$,

$$y_G = \frac{I(\alpha)}{2S} = \frac{2R\sin\alpha\,(3 - \sin^2\alpha)}{3\,(2\alpha + \sin 2\alpha)}.$$

Cazuri particulare

$\alpha = \frac{\pi}{6}$, ..., $y_G = \frac{11R}{6(2\pi + 3\sqrt{3})}$,

$\alpha = \frac{\pi}{4}$, ..., $y_G = \frac{5R\sqrt{2}}{3(\pi + 2)}$,

$\frac{\pi}{3}$, ..., $y_G = \frac{9R\sqrt{3}}{2(4\pi + 3\sqrt{3})}$,

$\alpha = \frac{\pi}{2}$, ..., $y_G = \frac{4R}{3\pi}$ (centrul de greutate al unui semicerc),

Scanned with OKEN Scanner

$\alpha = \pi, \quad \ldots, \quad y_G = 0$ (centrul de greutate al cercului),

$\alpha = 0, \quad \ldots, \quad y_G = \dfrac{R}{2}$ (centrul de greutate al razei OC).

$$y_G = \frac{2R}{3} \lim_{\alpha \to 0} \frac{3 \sin \alpha - \sin^3 \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} =$$

$$= \frac{2R}{3} \lim_{\alpha \to 0} \frac{3 \cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{2 + 2 \cos 2\alpha} = \frac{2R}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{R}{2}.$$

În acest caz placa se reduce la segjmentul de dreaptă OC, care, evident are centrul de greutate situat la mijlocul lui: $OG = R/2$.

2. *Centrul de greutate al unui segment de cerc.*

Din figura 79 se constată că:

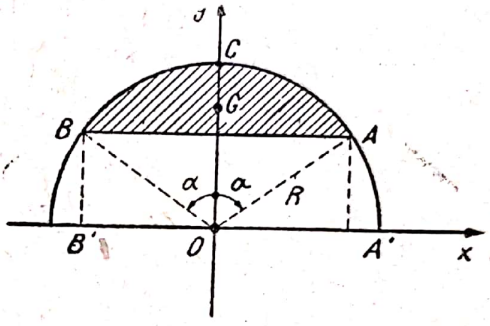


Fig. 79.

$$y_G = \frac{1}{2S} \int_{-R \sin \alpha}^{R \sin \alpha} [f^2(x) - g^2(\alpha)] \cdot dx =$$

$$= \frac{I(\alpha)}{2S}.$$

$$I(\alpha) = \int_{-R \sin \alpha}^{R \sin \alpha} [(R^2 - x^2) - R^2 \cos^2 \alpha] \cdot dx = \frac{4}{3} R^3 \sin^3 \alpha.$$

$$S = R^2 \alpha - \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2} = \frac{R^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha).$$

$$y_G = \frac{I(\alpha)}{2S} = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)},$$

formulă folosită la calculul volumului butoaielor.

Cazuri particulare

$$\alpha = 0, \; y_G = \frac{4R}{3} \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right) = \frac{4R}{3} \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{2 - 2 \cos 2\alpha} \right) =$$

$$= \frac{4R}{3} \lim_{\alpha \to 0} \frac{6 \sin \alpha \cos^2 \alpha - 3 \sin^3 \alpha}{4 \sin 2\alpha} = \frac{4R}{3} \cdot \frac{6}{8} = R.$$

În acest caz placa se reduce la punctul C, deci $y_G = OC = R$.

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \; \ldots, \; y_G = \frac{R}{2(\pi - 3)},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \; \ldots, \; y_G = \frac{2R\sqrt{2}}{3(\pi - 2)},$$

Scanned with OKEN Scanner

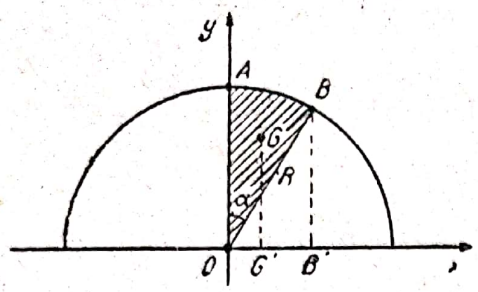


Fig. 80.

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \ldots, \quad y_G = \frac{3R\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \ldots, \quad y_G = \frac{4R}{3\pi}.$$

3. *Centrul de greutate al unei plăci plane, de forma unui sector circular de unghi α și rază R.*

Folosind notațiile din figura 80, se obține

$$x_G = \frac{1}{S}\int_0^{R\sin\alpha} x(y_1 - y_2)\,dx = \frac{I_x}{S}.$$

$$I_x = \int_0^{R\sin\alpha} x\left(\sqrt{R^2 - x^2} - x\operatorname{ctg}\alpha\right) = \frac{R^3}{3}(1 - \cos^3\alpha) - \frac{R^3}{3}\cdot\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

$$S = \frac{R^2\alpha}{2}\ ;\quad x_G = \frac{2R(1-\cos\alpha)}{3\alpha}.$$

$$y_G = \frac{1}{2S}\int_0^{R\sin\alpha}(y_1^2 - y_2^2) = \frac{1}{2S}\int_0^{R\sin\alpha}(R^2 - x^2 - x^2\operatorname{ctg}^2\alpha)\,dx = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}.$$

Cazuri particulare

$$\alpha = 0, \ldots, x_G = \frac{2R}{3}\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = \frac{2R}{3}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{1} = 0,$$

$$y_G = \frac{2R}{3}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2R}{3}.$$

Centrul de greutate se află pe axa Oy situat la distanța $OG = \frac{2}{3}R$.

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \ldots; \quad x_G = \frac{2R}{\pi}(2 - \sqrt{3}), \quad y_G = \frac{2R}{\pi},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \ldots, \quad x_G = \frac{4R}{3\pi}(2 - \sqrt{2}), \quad y_G = \frac{4R}{3\pi}\sqrt{2},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \ldots, \quad x_G = \frac{R}{\pi}, \quad y_G = \frac{R}{\pi}\sqrt{3},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \ldots, \quad x_G = \frac{4R}{3\pi}, \quad y_G = \frac{4R}{3\pi},$$

$$\alpha = \pi, \ldots, \quad x_G = \frac{4R}{3\pi}, \quad y_G = 0,$$

$$\alpha = 2\pi, \ldots, \quad x_G = 0, \quad y_G = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

4. *Centrul de greutate al unei plăci plane mărginite de cercul* $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ *și parabola* $y^2 = ax$, *situată deasupra axei* Ox $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

Construind graficul celor două curbe, se constată că cercul C și parabola P se taie în punctele $O(0, 0)$ și $A(a; a)$.

Folosind datele din figura 81 se obține:

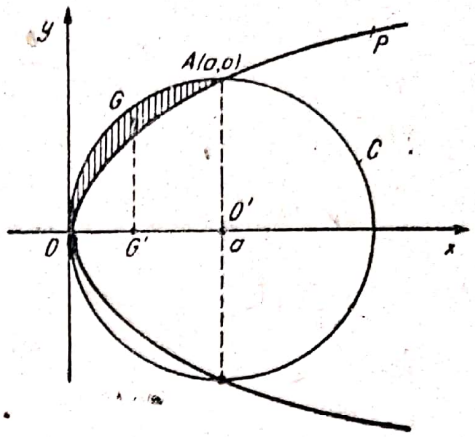


Fig. 81.

$$x_G = \frac{\int_0^a x(y_1 - y_2)\,dx}{\int_0^a (y_1 - y_2)\,dx} =$$

$$= \frac{\int_0^a x(\sqrt{2ax - x^2} - \sqrt{ax})\,dx}{\int_0^a (\sqrt{2ax - x^2} - \sqrt{ax})\,dx} = \frac{15\pi - 44}{15\pi - 40}\,a \approx 0{,}43a.$$

$$y_G = \frac{\int_0^a (y_1^2 - y_2^2)\,dx}{2\int_0^a (y_1 - y_2)\,dx} = \frac{\int_0^a (ax - x^2)\,dx}{2\int_0^a (\sqrt{2ax - x^2} - \sqrt{ax})\,dx} = \frac{a}{3\pi - 8} \approx 0{,}52a.$$

Probleme propuse

1. Să se determine centrul de greutate al unei jumătăți de elipsă, a cărei ecuație este: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; $x \in [-a, a]$; $y \in [0, b]$.

R. $x_G = 0$; $y_G = 4b/3\pi$ (fig. 82).

2. Centrul de greutate al unei plăci plane mărginite de elipsa: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $x \in [0, a]$; $y \in [0, b]$;

R. $x_G = \frac{4a}{3\pi}$, $y_G = \frac{4b}{3\pi}$ (fig. 83).

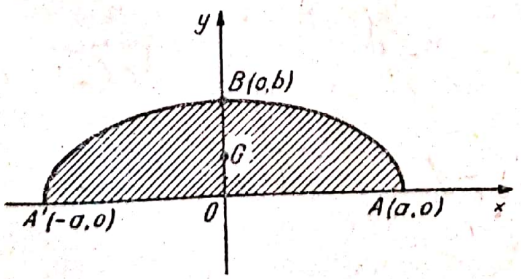


Fig. 82.

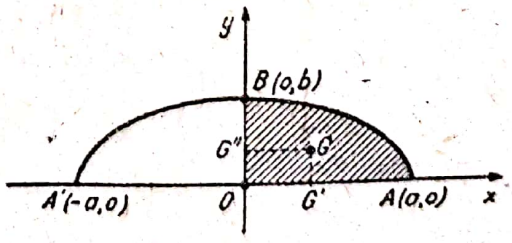


Fig. 83.

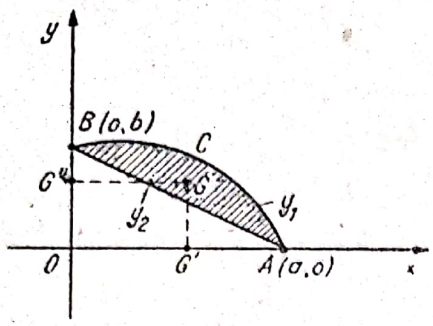


Fig. 84.

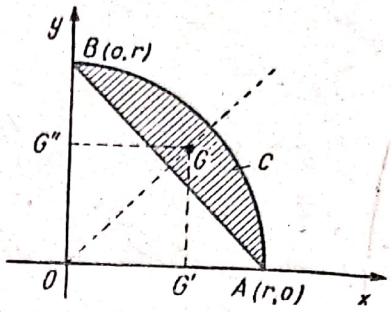


Fig. 85.

3. Se cere centrul de greutate al unei plăci de forma unui segment de elipsă, determinat de coarda ce unește vîrfurile $A(a, 0)$, $B(0, b)$, adică segmentul de elipsă ACB (fig. 84).

R. Din ecuația elipsei $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ și a dreptei AB: $x/a + y/b = 1$ se deduce:

$$y_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}; \quad y_2(x) = \frac{b}{a}(a - x).$$

Se va găsi:

$$x_G = 2a : 3(\pi - 2); \quad y_G = 2b : 3(\pi - 2).$$

Caz particular: $a = b = r$, elipsa devine cerc, coordonatele centrului de greutate al segmentului de cerc ACB (fig. 85) sînt: $x_G = y_G = 2r : 3(\pi - 2)$.

4. Centrul de greutate al unei plăci plane mărginită de sinusoida: $y = a \sin(x/a)$, axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = a\pi$, $a > 0$ (fig. 86).

R. $x_G = \frac{1}{S}\int_0^{a\pi} x \sin\frac{x}{a}\,dx$; $y_G = \frac{a}{2S}\int_0^{a\pi} \sin^2\frac{x}{a}\,dx$; $S = 2a$.

Se va găsi:

$$x_G = a\pi : 2;$$

$$y_G = a\pi : 8.$$

Caz particular $a = 1$, $G\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

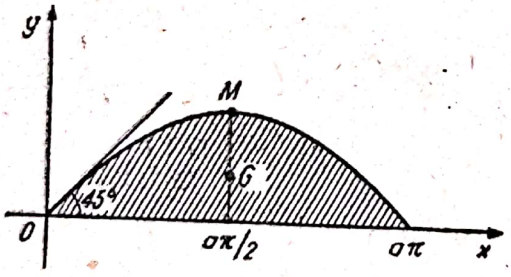


Fig. 86.

Observații: — Formulele (5) și (6) permit determinarea centrelor de greutate numai pentru plăcile *plane* și *omogene*, delimitate de graficul unor funcții continue pe un interval dat $[a, b]$.

— Pentru a obține aria suprafețelor precum și volumul corpurilor de rotație se pot folosi și teoremele lui Guldin care se enunță astfel:

Prima teoremă a lui Guldin. Aria (A) a suprafeței de rotație, generată prin rotirea unei curbe plane în jurul unei axe din același plan, care nu taie curba, este egală cu produsul dintre lungimea (L) a acelei curbe și

Scanned with OKEN Scanner

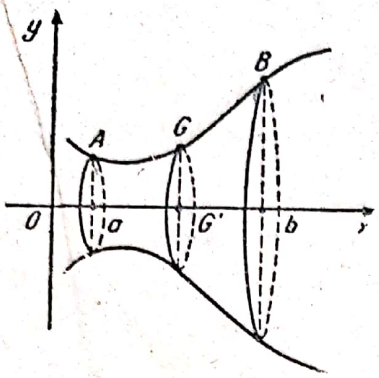


Fig. 87.

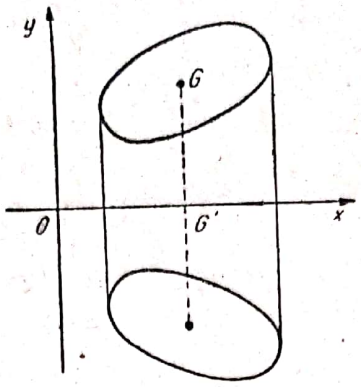


Fig. 88.

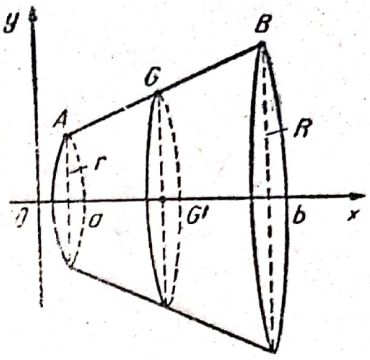


Fig. 89.

lungimea cercului descris de centrul de greutate al curbei în jurul acelei axe: $A = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot L$ (fig. 87).

Cazuri particulare:

— Dacă curba plană este închisă şi notăm cu P perimetrul ei, $A = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot P$ (fig. 88).

— Dacă curba este un cerc, corpul obţinut se numeşte tor, aria lui va fi: $A = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr$ (unde R este raza torului, iar r este raza cercului).

— Dacă curba se reduce la un segment de dreaptă $|AB|$ (fig. 89), atunci ea descrie un trunchi de con a cărui arie laterală este: $A = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot ||AB|| = \pi g(R + r)$, deoarece $||AB|| = g$ este generatoarea trunchiului de con, iar $||GG'|| = (R + r) : 2$ este linie mijlocie în trapezul $AabB$.

— Dacă $|AB| \parallel Ox$, segmentul $|AB|$ va descrie un cilindru a cărui arie laterală $A = 2\pi \cdot ||OG'|| \cdot ||AB|| = 2\pi rg$.

Formula $A = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot L$ conţine 3 elemente:

— Lungimea (L) a arcului (sau perimetrul P al figurii) care se roteşte.

— Aria (A) a suprafeţei de rotaţie generată de arcul L.

— Distanţa $||GG'||$ de la centrul de greutate la axa de rotaţie.

Dacă două din aceste elemente sînt cunoscute, al treilea se poate obţine:

$$A = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot L; \quad ||GG'|| = A : 2\pi L; \quad L = A : 2\pi \cdot ||GG'||.$$

Exemple

1. Centrul de greutate al unui semicerc cu centrul în origine şi de rază R.

Soluţie. $A = 4\pi R^2$ (suprafaţa sferei), $L = \pi R$ (lungimea unui semicerc).

$$||GG'|| = A : 2\pi L = 4\pi R^2 : (2\pi \cdot \pi R) = 2R : \pi.$$

2. Se cere aria generată de pătratul $ABCD$ de latură a, prin rotirea lui în jurul axei $x'x$, ce trece prin vîrful A şi face cu latura $|AB|$ un unghi α. (fig. 90).

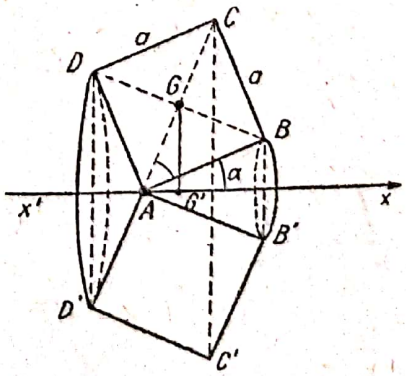


Fig. 90.

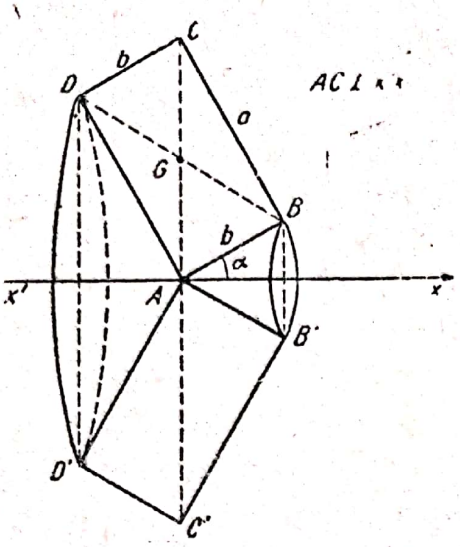


Fig. 91.

Soluție. Din $\triangle AGG'$ se deduce:

$$||GG'|| = ||AG|| \sin(\alpha + 45°) =$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin(\alpha + 45) = \frac{a}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Se obține

$$A = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot P =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{a}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot 4a =$$

$$= 4\pi a^2(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

3. Se cere aria generată prin rotirea în jurul axei $x' - x$ a dreptunghiului $ABCD$ avînd laturile a, b și diagonala $d = |AC| \perp xx'$ știind că latura $|AB|$ face cu axa xx' un unghi α (fig. 91).

Soluție. Se constată că $||AG|| = ||AC|| : 2 = d : 2$, $a = d \cdot \cos\alpha$; $b = d \cdot \sin\alpha$, $A = 2\pi||AG|| \cdot P = 2\pi \cdot \frac{d}{2}(2a + 2b) = 2\pi d^2(\sin\alpha + \cos\alpha)$.

A doua teoremă a lui Guldin. Volumul (V) al corpului generat de o suprafață plană prin rotirea ei în jurul unei axe din același plan, pe care nu o taie, este egal cu produsul dintre aria (S) a acelei suprafețe și lungimea cercului descris de centrul de greutate al suprafeței în jurul axei: $V = 2\pi||GG'|| \cdot S$.

În particular, dacă aria S este limitată de trapezul curbiliniu $AA'B'B$, mărginit de curba $y = f(x)$ continuă și derivabilă pe intervalul $[a,b]$, de dreptele $x = a$, $x = b$ și axa Ox (fig. 92) atunci: $V = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot A$ (A = aria $AA'B'B$, G' proiecția centrului de greutate G pe axa Ox).

— Dacă aria este limitată de trapezul rectiliniu $ABB'A'$ se va obține un trunchi de con (fig. 93).

$$V = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot S; \quad ||GG'|| = V : 2\pi \cdot S = (R^3 - r^3) : 3(R^2 - r^2).$$

— Dacă două din elementele V, $||GG'||$, A sînt cunoscute, teorema a doua a lui Guldin ne permite să calculăm pe cel de al treilea:
$V = 2\pi||GG'|| \cdot S$; $||GG'|| = V : 2\pi S$; $S = V : 2\pi||GG'||$.

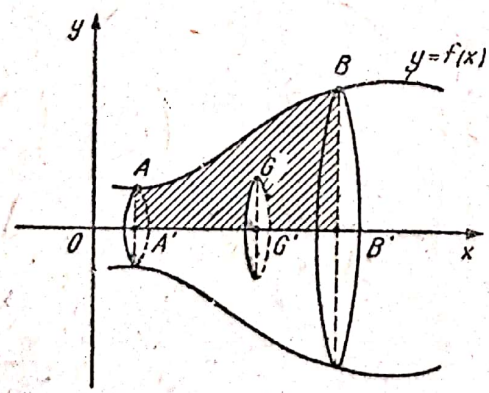


Fig. 92.

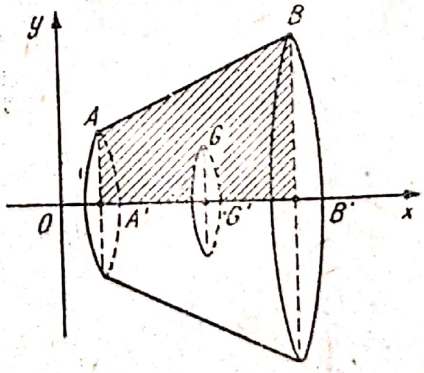


Fig. 93.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple

1. Să se determine centrul de greutate al unei plăci semicirculare cu centrul în originea O a axelor de coordonate și de rază r, având diametrul situat pe axa Ox.

Soluție. Cum $V = 4\pi R^3 : 3$, $A = \pi R^2 : 2$, se obține:

$$GG' = \frac{V}{2\pi S} = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{2}{2\pi \cdot \pi R^2} = \frac{4R}{3\pi},$$

același rezultat obținut pe o cale mult mai laborioasă, folosind calculul integral (formulele (5)).

2. Se cere volumul corpului obținut prin rotirea pătratului $ABCD$ în jurul dreptei $x'x$ ce trece prin vîrful A și face un unghi α cu latura $|AB|$ (fig. 90).

Soluție. Cum $||GG'|| = \frac{a}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$ și $S = a^2$, rezultă:

$$V = 2\pi\,||GG'|| \cdot S = 2\pi \frac{a}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)\,a^2 = \pi a^3(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

3. Se cere volumul V al corpului obținut prin rotirea dreptunghiului $ABCD$ în jurul dreptei $x'x$, știind că: $||BC|| = ||AD|| = a$, $||AB|| = ||CD|| = b$, diagonala $||AC|| = d \perp x'x$, iar latura $|AB|$ face cu axa de rotație $x'x$ un unghi α (fig. 91).

Soluție. Avem: $||AG|| = d : 2$; $a = d\cos\alpha$; $b = a\sin\alpha$; $S = ab = d^2 \sin\alpha\cos\alpha$.

Rezultă: $V = 2\pi\|AG\| \cdot S = 2\pi \cdot \frac{d}{2} \cdot d^2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha = \pi d^3 \sin\alpha\cos\alpha$.

4. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului dreptunghic ABC în jurul bisectoarei exterioare a unghiului A ($\widehat{A} = 90°$, $||BC|| = a$, $||AB|| = c$, $||AC|| = b$; $\widehat{C} = \alpha$), în funcție de a și α (fig. 94).

Soluție. Se constată că $||MA|| = ||MC|| = a : 2$; $||AG|| = \frac{2}{3}||AM|| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3}$; $||GG'|| = ||AG|| \sin(\alpha + 45°) = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{a\sqrt{2}}{6}(\sin\alpha + \cos\alpha)$ · aria $\triangle ABC = S = \frac{bc}{2} = \frac{1}{2}a^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{a^2}{4}\sin 2\alpha$.

$$V = 2\pi\,||GG'|| \cdot S = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{6}(\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot \frac{a^2}{4}\sin 2\alpha = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}\sin 2\alpha\,(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

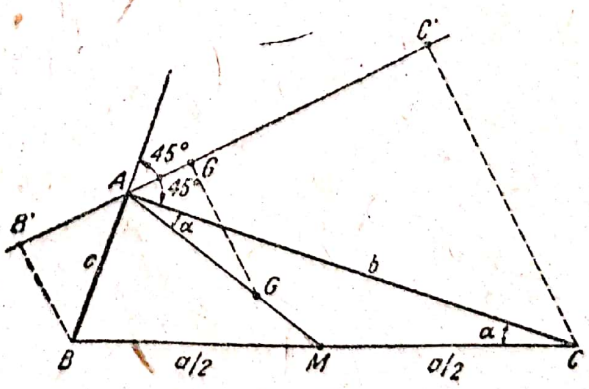


Fig. 94.

5. Se cere volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului ABC în jurul axei $|BF| \perp |BC|$,

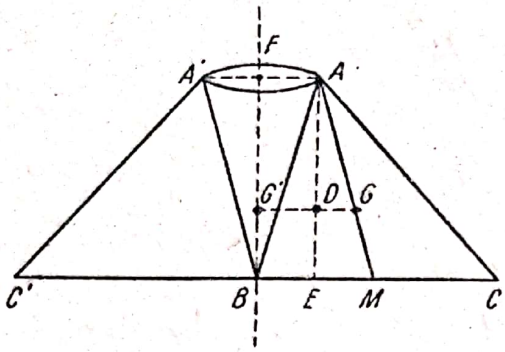


Fig. 95.

știind că $||AB|| = 13$, $||BC|| = 14$, $||AC|| = 15$ (fig. 95).

Soluție. Se calculează aria S a triunghiului ABC cunoscînd laturile $a = 14$, $b = 15$, $c = 13$,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84,$$

apoi

$$||AE|| = \frac{2S}{||BC||} = 12.$$

Din $\triangle ARE$ se obține

$$||BE|| = ||AF|| = \sqrt{||AB||^2 - ||AE||^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Pentru a determina pe $||GG'||$ se consideră sistemul de axe format din $|BC|$ (axă Ox) și $|BF| \perp |BC|$ (axă Oy). Abscisa punctului G va fi:

$$||GG'|| = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \frac{1}{3}(||AF|| + 0 + ||BC||) =$$

$$= \frac{1}{3}(5 + 14) = \frac{19}{3}.$$

Rezultă: $V = 2\pi ||GG'|| S = 2\pi \frac{19}{3} \cdot 84 = 1064\pi$.

Observație. Cum $||GG'|| = ||G'D|| + ||DG||$, iar $||DG|| = \frac{2}{3}||EM|| = \frac{2}{3}(||BM|| - ||BE||) = \frac{2}{3}(7 - 5) = \frac{4}{3}$, găsim $||GG'|| = ||G'D|| + ||DG|| = 5 + \frac{4}{3} = \frac{19}{3}$ (fără cunoștințe de geometrie analitică).

Concluzie. Suprafețele și volumele de rotație se pot obține:
— folosind calculul integral;
— cu ajutorul celor două teoreme ale lui Guldin;
— folosind noțiuni de geometrie elementară (suprafețele și volumele corpurilor de rotație).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII.

APLICAȚII DIVERSE

§ 1. O problemă de croială

În tinichigerie se pune în mod curent problema de a se confecționa din tablă un burlan prevăzut cu un cot (fig. 96).

Unghiul format de cele două axe ale cotului este de cele mai multe ori de 90°, dar uneori poate fi de 30°, 45°, 60°, 120°.

Astfel de probleme se pun și în croitorie, atunci cînd se face croiala unei mîneci în partea în care se unește cu umărul și în construcția țevilor de apă sau de gaze, atunci cînd trebuie să construim o racordare (un cot sau un teu).

Se știe că astfel de croieli se fac cu ajutorul unui șablon dinainte construit. Dar cum se realizează un astfel de șablon?

Vom arăta că el se construiește cu ajutorul unei sinusoide simple, sau a unei sinusoide generalizate $y = a \sin x$ (a fiind o constantă cunoscută).

În acest scop se face o secțiune într-un cilindru circular drept cu un plan care face cu planul bazei un unghi α (fig. 97), apoi se desfășoară pe un plan suprafața laterală a cilindrului.

Secțiunea circulară $APBK$ se va desfășura după dreapta $ADBKC$, iar secțiunea $AMNBN'$ (care este o elipsă) se va desfășura după curba

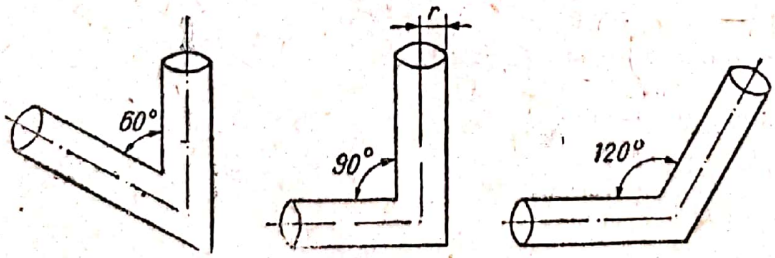


Fig. 96.

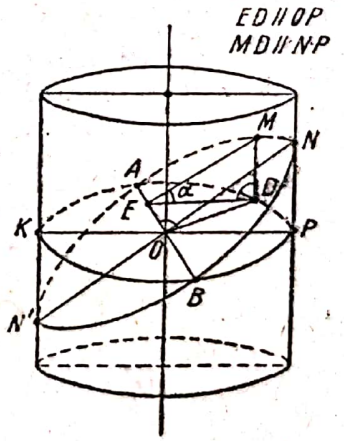


Fig. 97.

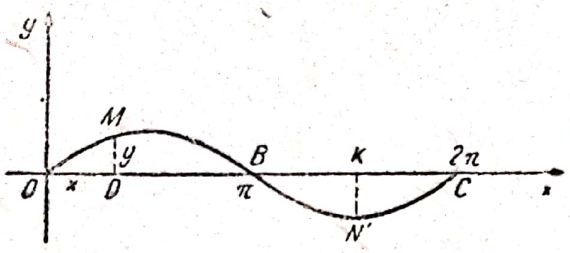


Fig. 98.

$AMBN'C$ (fig. 98) care este o sinusoidă generalizată.

Într-adevăr, dacă notăm:

$$\widehat{AD} = x,$$
$$\|DM\| = y,$$
$$\|NP\| = h,$$
$$\|OP\| = r,$$

$$\text{din } \triangle EOD \rightarrow \|ED\| = r \sin x;$$

$$\text{din } \triangle EDM \rightarrow y = \|DM\| = \|ED\| \operatorname{tg}\alpha = r \sin x \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\|MD\|}{\|ED\|} = \frac{\|NP\|}{\|OP\|} = \frac{h}{r};$$

se obţine: $y = r \operatorname{tg} \alpha \sin x = r \dfrac{h}{r} \sin x = h \sin x$ (c.c.t.d).

Deci, desfăşurata unei secţiuni oblice a unui cilindru circular drept pe un plan este o sinusoidă generalizată:

$$y = h \sin x,$$

unde

$$h = r \operatorname{tg} \alpha.$$

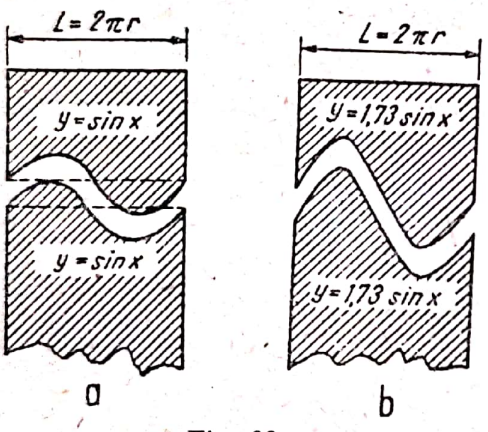


Fig. 99.

Dacă cele două părţi ale cotului fac între ele un unghi de 90°, atunci

$$\alpha = 45°, \quad \operatorname{tg}\alpha = 1$$

şi deci

$$h = r.$$

Dacă vom considera $r = 1$, se obţine sinusoida simplă $y = \sin x$ (fig. 99 *a*).

Construcţia sinusoidei se face prin puncte pe o foaie de carton, apoi după ea se realizează un şablon din tablă, care va servi ori de cîte ori avem nevoie să construim astfel de coturi.

Dacă cele două coturi fac între ele un unghi de 60°, atunci $h = r \operatorname{tg} 60° = r\sqrt{3} \approx 1{,}73\ r$, deci se obţine sinusoida generalizată $y = 1{,}73r \cdot \sin x$, (pentru $r = 1$; $y = 1{,}73 \sin x$) şi se va obţine şablonul din figura 99*b*.

Dacă $\alpha = 30°$, $h = r \operatorname{tg} 30° = r \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}57\ r$; se obţine sinusoida $y = 0{,}57\ r \sin x$ (sau, pentru $r = 1$, $y = 0{,}57 \sin x$). Cele două părţi ale cotului vor face în acest caz 120°.

Observaţii. În general, pentru ca axele celor două coturi să facă între ele un unghi β, unghiul α se va obţine din relaţia $\beta = 180° - 2\alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

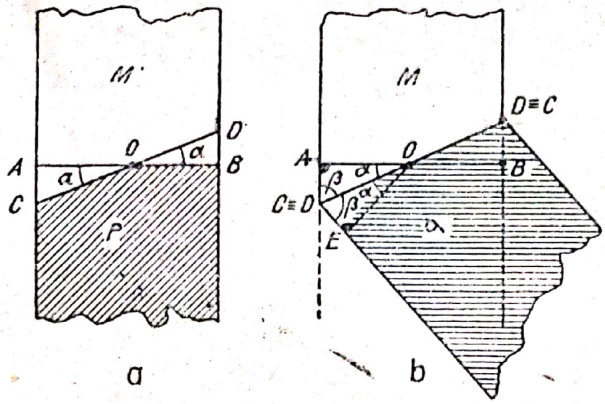


Fig. 100.

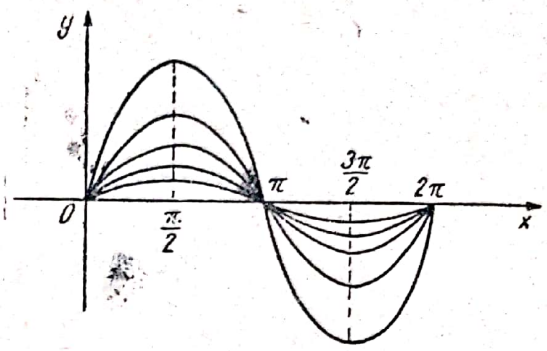


Fig. 101.

Această egalitate se poate deduce uşor din figurile 100 *a* — *b*. Dacă se taie fîşia haşurată din figura 100 *a*, după linia *CD*, se întoarce cu 180° şi se lipeşte de-a lungul liniei *CD*, se va obţine figura 100 *b*.

Din triunghiul dreptunghic *ACO* se constată că $\widehat{ACO} = 90° - \alpha$, $2\,\widehat{ACO} = 180° - 2\alpha$, sau $\beta = 180° - 2\alpha$ şi $\alpha = 90 - \frac{\beta}{2}$.

La construirea şablonului trebuie să cunoaştem raza r a secţiunii drepte, precum şi unghiul β format de axele celor două părţi ale cotului.

Cei doi parametri r şi β fiind cunoscuţi, ecuaţia sinusoidei generalizate după care se va construi şablonul va fi:

$$y = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \sin x.$$

Practic, şabloanele sînt cuprinse de obicei între limite restrînse, deoarece unghiul β nu ia decît valori cuprinse între 30° şi 150° ($30° \leqslant \beta \leqslant 150°$).

Pentru $\beta = 30°, 60°, 90°, 120°, 150°$, se obţin următoarele şabloane:

$$y = r \cdot \operatorname{ctg} 15° \sin x = r(2 + \sqrt{3}) \sin x = 3{,}73\, r \sin x,$$

$$y = r \cdot \operatorname{ctg} 30° \sin x = r\sqrt{3} \sin x = 1{,}73\, r \sin x,$$

$$y = r \cdot \operatorname{ctg} 45° \sin x = r \sin x,$$

$$y = r \cdot \operatorname{ctg} 60° \sin x = r \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x = 0{,}57\, r \sin x,$$

$$y = r \cdot \operatorname{ctg} 75° \sin x = r(2 - \sqrt{3}) \sin x = 0{,}27\, r \sin x,$$

ale căror grafice se pot vedea în figura 101.

§ 2. Aplicaţii ale analizei combinatorii

1. Pentru executarea unei broaşte de la telefonul cu monedă se folosesc 4 verturi de diferite forme.

Un vert este o plăcuţă metalică de o anumită grosime şi formă.

Mai multe verturi aşezate unul peste altul şi care se pot roti în jurul unui ax, datorită unui resort, constituie mecanismul unei broaşte „Wertheim".

Scanned with OKEN Scanner

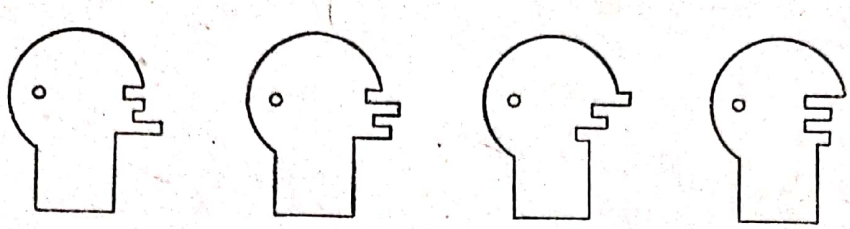


Fig. 102.

Dacă aceste verturi sînt aşezate într-o anumită ordine, broasca se deschide cu un anumit fel de cheie.

Cheia cu care se deschide o astfel de broască are anumite forme care depind de numărul şi profilul verturilor (fig. 102).

Se întreabă, cîte broaşte care se pot deschide cu chei diferite se pot construi, ştiind că fiecare broască trebuie să conţină 4 verturi, iar o broască poate să difere de alta, fie prin forma verturilor, fie prin ordine, fie şi prin forma şi ordinea lor.

Soluţie. Va trebui să trecem în revistă toate poziţiile posibile a celor 4 verturi:

— *Cele 4 verturi identice.* Dacă notăm cu a, b, c, d cele 4 verturi, vom putea avea 4 broaşte diferite care au toate verturile identice: $(a\ a\ a\ a)$, $(b\ b\ b\ b)$, $(c\ c\ c\ c)$, $(d\ d\ d\ d)$.

În acest caz, o broască diferă de alta numai prin forma verturilor, iar numărul de broaşte diferite, N_1 care se pot forma este:

$$N_1 = C_4^1 = 4.$$

— *Trei verturi identice al patrulea diferit.* Vom presupune că cele trei verturi identice sînt egale cu a, iar al patrulea cu b.

Cum vertul b poate ocupa 4 poziţii diferite faţă de a, vom avea următoarele situaţii: $(b\ a\ a\ a)$, $(a\ b\ a\ a)$, $(a\ a\ b\ a)$, $(a\ a\ a\ b)$.

Dacă schimbăm pe b cu a, vom avea în compunerea unei broaşte 3 verturi b şi un vert a. Deci cu cele două verturi a şi b putem construi $2 \cdot C_4^1$ broaşte diferite. Cum în total avem 4 verturi diferite a, b, c, d, vom putea construi atîtea broaşte cu două verturi diferite, cîte combinări se pot face cu 4 obiecte luate cîte două, adică C_4^2. Deci, numărul total N_2 de broaşte care se pot construi cu 3 verturi identice şi unul diferit va fi:

$$N_2 = 2C_4^1 \cdot C_4^2 = 48.$$

— *Două verturi identice, două diferite.* Dacă cele două verturi identice sînt egale cu a, iar cele două diferite cu b şi c, acestea vor putea ocupa faţă de a următoarele 6 poziţii: $(b\ c\ a\ a)$, $(b\ a\ c\ a)$, $(b\ a\ a\ c)$, $(a\ b\ c\ a)$, $(a\ b\ a\ c)$, $(a\ a\ b\ c)$; în total, C_4^2 poziţii diferite.

Schimbînd pe b cu c, vom obţine alte C_4^2 broaşte diferite: $(c\ b\ a\ a)$, $(c\ a\ b\ a)$, $(c\ a\ a\ b)$, $(a\ c\ b\ a)$, $(a\ c\ a\ b)$, $(a\ a\ c\ b)$.

Dacă menţinem verturile diferite b şi c, putem construi atîtea broaşte diferite cîte verturi identice putem avea. În cazul nostru $4 - 2 = 2$; pe a şi d.

Dacă menţinem acum verturile identice, vom putea construi atîtea broaşte diferite cîte combinări se pot face cu cele 4 verturi a, b, c, d, luate cîte două, adică C_4^2.

Scanned with OKEN Scanner

În total, numărul broaștelor diferite care se pot construi cu două verturi identice și două diferite va fi:

$$N_3 = 2(4-2) \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 = 144.$$

— *Două verturi identice, celelalte două tot identice.* Dacă vom considera două verturi egale cu a și celelalte două egale cu b, vom putea avea următoarele 6 poziții diferite: $(a\,a\,b\,b)$, $(a\,b\,a\,b)$, $(a\,b\,b\,a)$, $(b\,a\,a\,b)$, $(b\,a\,b\,a)$, $(b\,b\,a\,a)$; adică C_4^2 broaște diferite.

Dacă schimbăm pe a cu b, din motive de simetrie nu vom obține nici o poziție diferită de cele 6 menționate. Dar cu cele 4 verturi diferite $(a\,b\,c\,d)$ vom putea construi C_4^2 broaște diferite (numărul combinărilor a 4 obiecte luate cîte două): $(a\,a\,b\,b)$ $(a\,a\,c\,c)$, $(a\,a\,d\,d)$, $(b\,b\,c\,c)$, $(b\,b\,d\,d)$, $(c\,c\,d\,d)$.

Numărul total de broaște diferite, în acest caz, va fi:

$$N_4 = C_4^2 \cdot C_4^2 = 36.$$

— *Toate verturile diferite.* În acest caz, o broască diferă de alta numai prin ordinea verturilor, deci vom avea atîtea broaște diferite cîte permutări se pot face cu 4 obiecte:

$$N_5 = P_4 = 4! = 24.$$

În concluzie, numărul total N de broaște care conțin 4 verturi, iar o broască diferă de alta, fie prin forma, fie prin ordinea, fie și prin forma și prin ordinea verturilor va fi:

$$N = \sum_1^5 N_i = 4 + 48 + 144 + 36 + 24 = 256.$$

Observație: vom presupune că avem 4 obiecte diferite: a_1, a_2, a_3, a_4. Ne propunem să calculăm numărul G_4^4, al tuturor grupelor simple și cu repetiție ce se pot forma cu cele 4 obiecte date.

Numărul grupelor simple ce se pot forma cu un singur obiect va fi 4:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,$$

Deci $G_4^1 = 4$.

Adăugăm la dreapta fiecărei grupe de cîte un obiect, pe rînd pe fiecare din cele 4 obiecte.

a_1a_1	a_2a_2	a_3a_3	a_4a_4
a_1a_2	a_2a_3	a_3a_4	a_4a_1
a_1a_3	a_2a_4	a_3a_1	a_4a_2
a_1a_4	a_2a_1	a_3a_2	a_4a_3

Am format astfel toate grupele ce conțin cîte două obiecte.

Numărul acestor grupe va fi:

$$G_4^2 = 4G_4^1 = 4^2.$$

Repetăm procedeul, așezînd la dreapta fiecărei din cele 4^2 grupe pe rînd pe fiecare din cele 4 obiecte. Se vor forma astfel toate grupele care conțin cîte 3 obiecte. Deoarece la fiecare din cele 4^2 grupe formate mai sus va trebui să adăugăm pe rînd pe $a_1a_2a_3a_4$, numărul grupelor astfel formate va fi:

$$G_4^3 = 4G_4^2 = 4 \cdot 4^2 = 4^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Continuăm procedeul, adăugînd la dreapta celor 4^3 grupe astfel formate, pe rînd aceleaşi 4 obiecte a_1, a_2, a_3, a_4.

Vom forma astfel toate grupele de cîte 4 obiecte. Numărul lor va fi:

$$G_4^4 = 4G_4^3 = 4 \cdot 4^3 = 4^4.$$

În acest mod am obţinut toate grupele de 4 obiecte ce se pot forma, astfel încît o grupă să difere de alta, fie prin forma, fie prin ordinea, fie şi prin forma şi prin ordinea obiectelor. Numărul lor va fi $G_4^4 = 4^4 = 256$.

Generalizare. Dacă în definiţia dată aranjamentelor simple nu punem condiţia ca obiectele ce compun o grupă să fie distincte, obţinem aranjamente cu repetiţie.

Pentru a obţine formula care ne dă numărul total de grupe ce se pot astfel forma, pornim de la numărul grupelor simple ce se pot forma cu n obiecte: a_1, a_2, ..., a_n luate cîte unul.

Numărul acestor grupe este:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

şi conţine n grupe; $G_n^1 = n$.

Adăugăm la dreapta fiecărei grupe obţinute mai sus pe rînd cele n obiecte: a_1, a_2, ..., a_n. Vom obţine toate grupele de două obiecte:

$$\begin{array}{llll} a_1a_1 & a_2a_1 & \ldots & a_na_1 \\ a_1a_2 & a_2a_2 & \ldots & a_na_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ a_1a_n & a_2a_n & \ldots & a_na_n \end{array}$$

Vom avea în total n^2 astfel de grupe:

$$G_n^2 = n \cdot G_n^1 = n^2.$$

Repetînd procedeul de m ori[1], obţinem succesiv:

$$G_n^3 = n\,G_n^2 = n^3,\ \ldots,\ G_n^{m-1} = nG_n^{m-2} = n^{m-1},\ G_n^m = nG_n^{m-1} = n^m.$$

În particular, dacă $m = n$; $G_n^n = n^n$.

Observaţii: Dacă notăm cu $N(n)$, numărul broaştelor care se pot deschide cu chei diferite în condiţiile problemei şi facem succesiv $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, obţinem:

$$N(2) = 2^2 = 4;\ N(3) = 3^3 = 27;\ N(4) = 4^4 = 256;$$

$$N(5) = 5^5 = 3125;\ N(6) = 6^6 = 46656;\ \ldots$$

Se constată că $N(n)$ creşte foarte repede cu n.

Dacă într-o localitate se pun în vînzare cel mult 3125 lacăte, va fi suficient ca aceste lacăte să aibă în construcţia lor 5 verturi. În acest caz vom fi siguri că în localitatea respectivă nu vor exista două lacăte care se pot deschide cu aceeaşi cheie.

Numărul maxim de verturi diferite, care în mod practic se pot utiliza la fabricarea broaştelor de tip „Wertheim", este 6. În acest caz vom putea construi 46 656 broaşte care se pot deschide cu chei diferite.

---

[1] unde m poate fi mai mare ca n, deoarece nu am pus condiţia ca numărul obiectelor ce fac parte din fiecare grupă să fie distincte.

Scanned with OKEN Scanner

2. Unele fabrici construiesc și lacăte fără chei (fig. 103). Aceste lacăte se deschid cu ajutorul unui „cifru secret", cunoscut numai de posesorul lacătului și de fabrică. Pentru a putea deschide un astfel de lacăt trebuie să formăm un anumit număr (dacă pe fiecare disc cilindric sînt scrise cifre) sau un anumit cuvînt (dacă cifrele sînt înlocuite cu litere).

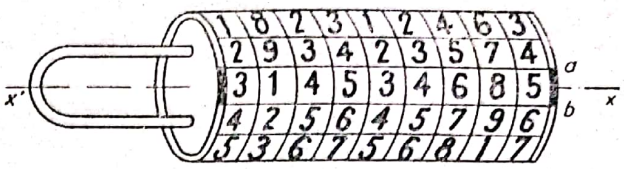


Fig. 103.

Să se calculeze numărul de lacăte care se pot deschide cu „cifru" diferit, dacă lacătul are în compunerea lui 9 discuri, iar pe fiecare disc sînt gravate toate numerele de la 1 la 9.

Soluție. Fiecare din cele 9 discuri cilindrice care au gravate numerele de la 1 la 9 în ordine succesivă, se pot roti în jurul axului comun $x'x$.

Numărul care trebuie format cu cele 9 cifre pentru ca lacătul să se poată deschide este așezat de obicei între două repere (a, b) așa cum se află numărul 314 534 685 din figura 103.

Deoarece nu punem condiția ca cifrele ce compun fiecare număr să fie distincte, numărul total al grupelor ce se pot forma este dat de numărul aranjamentelor cu repetiție a 9 obiecte. Cum $n = 9$, $G_9^9 = 9^9 = 389\,420\,481$.

Observație. Dacă posesorul unui astfel de lacăt uită cifrul, ar trebui să facă cel mult 9^9 încercări pentru a deschide lacătul. Dacă o încercare ar dura numai o secundă, ne-ar trebui cca 11 ani pentru toate cele 9^9 încercări.

3. O casă de bani are 3 uși. Pentru a ajunge la banii aflați în interior trebuie să deschidem cu ajutorul unui cifru fiecare ușă.

Pe prima ușă se află 4 discuri, pe a doua și a treia cîte 3 discuri. Pe fiecare disc sînt gravate cifrele 1, 2, 3, 4, 5 în ordine succesivă, fiecare disc putîndu-se roti în jurul unui ax comun. Cifrul se realizează formînd cu ajutorul discurilor cîte un anumit număr la fiecare ușă.

Care este numărul caselor de bani care se pot construi cu cifru diferit, știind că un cifru trebuie să difere de altul prin cel puțin un număr diferit la una din cele 3 uși?

Soluție. Deoarece numărul discurilor este diferit de numărul cifrelor gravate pe ele, vom folosi formula aranjamentelor cu repetiție a n obiecte luate cîte m.

Cum pe prima ușă avem 4 discuri, iar pe fiecare disc sînt gravate 5 cifre, vom avea în total $N_5^4 = 5^4$ case cu cifru diferit.

Pe ușa a doua și a treia vom avea $N_5^3 = 5^3$ case cu cifru diferit. Numărul total al caselor de bani care vor avea cifru diferit va fi:

$$N = N_5^4 \cdot N_5^3 \cdot N_5^3 = 5^4 \cdot 5^3 \cdot 5^3 = 5^{10} = 9765625.$$

§ 3. Aplicații în topografie

1. Să se determine distanța de la un punct C la un punct A vizibil dar inaccesibil din cauza unui obstacol (rîu, lac, groapă, teren mlăștinos etc.).

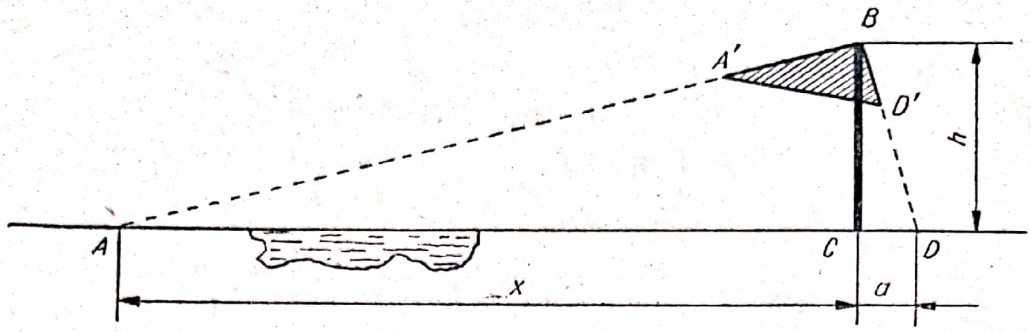


Fig. 104.

Soluție. În vîrful unui baston BC de lungime cunoscută $h = 1500$ mm se montează un echer $A'BD'$ cu unghiul drept în B, putînd oscila în jurul acestui punct (fig. 104).

Se rotește echerul în jurul punctului B, pînă cînd se vede punctul A de-a lungul catetei $|A'B|$ (folosind o lunetă care se așază pe cateta $|BA'|$), apoi se fixează echerul în această poziție.

Se fixează apoi luneta de-a lungul catetei $|BD'|$ și se vizează punctul D situat pe teren cu ajutorul unui indicator care se deplasează pînă cînd va fi prins în cîmpul vizual al lunetei. În acel moment se fixează punctul D de pe teren și se măsoară distanța $||CD|| = a$. Din triunghiul dreptunghic ABD, putem scrie

$$||BC||^2 = ||AC|| \cdot ||CD||$$

sau

$$x = h^2 : a.$$

Dacă $a = 50$ mm, se va găsi: $x = 45$ m.

2. Să se determine înălțimea unui turn, a unei case, a unui pom sau a unui deal etc., vizibil dar inaccesibil din cauza unui obstacol peste care nu putem trece (fig. 105).

Soluția 1. Folosind același procedeu descris la problema precedentă, se vizează vîrful B și se fixează echerul în această poziție. Se vizează punc-

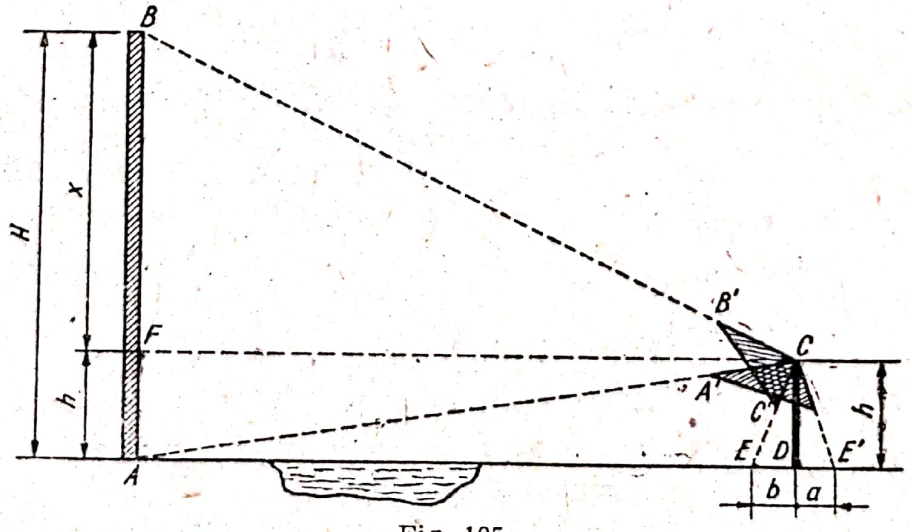


Fig. 105.

tul E situat pe teren şi se măsoară distanţa $||DE|| = b$; apoi se vizează punctul A şi se măsoară distanţa $||DE'|| = a$.

$$\triangle BFC \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{||BF||}{||ED||} = \frac{||FC||}{||CD||}, \quad \frac{x}{b} = \frac{||FC||}{||CD||} \Rightarrow x = b \cdot \frac{||FC||}{||CD||}.$$

$$\triangle CFA \sim \triangle CDE' \Rightarrow \frac{||FA||}{||DE||} = \frac{||FC||}{||CD||}, \quad \frac{h}{a} = \frac{||FC||}{||CD||} \Rightarrow h = a \cdot \frac{||FC||}{||CD||},$$

$\frac{x}{h} = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{b}{a}h$, dacă $a = 20$ mm, $b = 100$ mm, $h = 1500$ mm, se va găsi $x = 7{,}5$ m, iar înălţimea turnului va fi $H = 7{,}5 + 1{,}5 = 9$ m.

Soluţia. 2 Se aşază o oglindă plană culcată orizontal pe suprafaţa Pămîntului în punctul C, apoi observatorul se deplasează pînă ce vede raza reflectată din punctul B (A, C, I, sînt situate în linie dreaptă), figura 106.

Se deplasează apoi oglinda în C' şi observatorul în M' unde se vede raza reflectată din B (A, C', I', sînt situate în linie dreaptă).

Dacă notăm cu:

$||MI|| = ||M'I'|| = h$ înălţimea observatorului,

$||CC'|| = a$ = distanţa dintre poziţia celor două oglinzi,

$||CI|| = b$; $||C'I'|| = b'$, distanţa de la poziţia oglinzilor la piciorul observatorului, vom putea scrie (fig. 106):

$$\triangle BAC \sim \triangle MIC; \Rightarrow \frac{||AB||}{||MI||} = \frac{||AC||}{||CI||},$$

$$\triangle BAC' \sim \triangle M'I'C'; \Rightarrow \frac{||AB||}{||M'I'||} = \frac{||AC'||}{||C'I'||},$$

$$\frac{||AB||}{||MI||} = \frac{||AC||}{||CI||} = \frac{||AC'||}{||C'I'||} = \frac{||AC'|| - ||AC||}{||C'I'|| - ||CI||} = \frac{a}{b' - b} =$$

$$= \frac{||AB||}{h} = \frac{||AC||}{b};$$

$$||AB|| = \frac{ah}{b' - b}, \qquad ||AC|| = \frac{ab}{b' - b}.$$

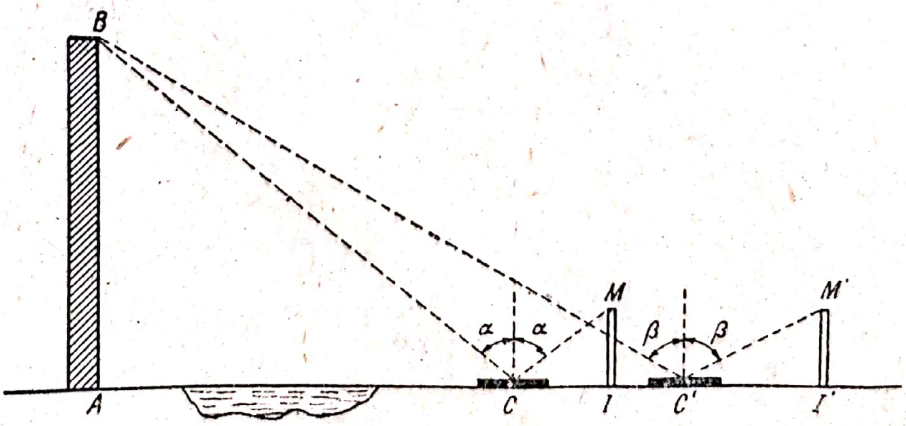


Fig. 106

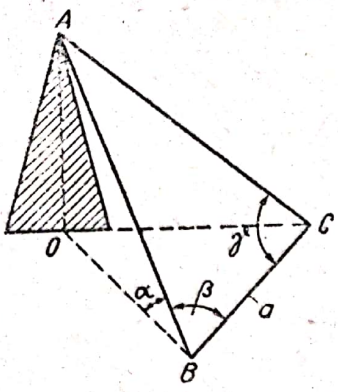


Fig. 107.

Soluția 3. Se consideră pe teren o bază BC (fig. 107) pe care o măsurăm $||BC|| = a$. Se măsoară apoi unghiurile $\beta = m(\widehat{ABC})$; $\gamma = m(\widehat{ACB})$; făcute de razele vizuale ce trec prin vîrfu[illegible]u latura $|BC|$.

În $\triangle ABC$ cunoaștem latura $|BC|$ și unghiurile $\widehat{ABC}$ și $\widehat{ACB}$ și deci putem determina pe $|AB|$ din teorema sinusului:

$$\frac{||AB||}{\sin\gamma} = \frac{||BC||}{\sin(\beta+\gamma)}; \quad ||AB|| = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Determinăm apoi unghiul α format de raza vizuală BA cu orizontala BO. Din triunghiul dreptunghic AOB se obține:

$$||AO|| = ||AB||\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Aplicație. Pentru $\alpha = 60°$, $\beta = 15°$, $\gamma = 30°$, $a = 60$ m; găsim $||AO|| = 15\sqrt{6}$.

3. Să se calculeze distanța dintre două puncte vizibile dar inaccesibile (din cauza unui obstacol).

Soluție. Fie $||AB|| = x$ distanța ce trebuie calculată (fig. 108). Alegem o bază $||CD|| = a$ și măsurăm cu ajutorul unui grafometru[1] unghiurile $\alpha = m(\widehat{ACB})$, $\beta = m(\widehat{BCD})$, $\gamma = m(\widehat{ADC})$, $\delta = m(\widehat{ADB})$ (fig. 108).

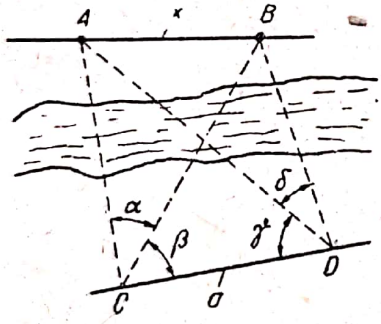


Fig. 108.

Aplicînd teorema sinusului în triunghiurile ACD și BCD se obține:

$$\frac{||CD||}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{||AC||}{\sin\gamma} = \frac{||AD||}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad (\triangle ACD)$$

$$\frac{||CD||}{\sin(\beta+\gamma+\delta)} = \frac{||BC||}{\sin(\gamma+\delta)} = \frac{||BD||}{\sin\beta}, \quad (\triangle BCD)$$

din care se deduce:

$$||AC|| = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}; \quad ||BC|| = \frac{a\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)}.$$

[1] Instrumentul de măsurat unghiurile formate de două raze vizuale $|OA|$ și $|OB|$.

Scanned with OKEN Scanner

Apoi, din triunghiul ABC, teorema cosinusului ne dă:

$$x^2 = \|AB\|^2 = \|AC\|^2 + \|BC\|^2 - 2\|AC\| \cdot \|BC\| \cdot \cos\alpha.$$

Aplicație. Pentru $\alpha = 30°$; $\beta = 75°$; $\gamma = 60°$; $\delta = 15°$ se obține:

$$\|AC\| = \frac{a}{2}(\sqrt{18} + \sqrt{6}), \quad \|BC\| = \frac{a}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

$$x = \|AB\| = a\sqrt{5 + 2\sqrt{3}} \approx 2{,}9a.$$

Probleme propuse

1. O statuie de înălțime (MO) se vede din punctele coliniare A, B, C sub unghiurile $m(\widehat{MAO}) = 3\alpha$, $m(\widehat{MBO}) = 2\alpha$, $m(\widehat{MCO}) = \alpha$.

Știind că $\|AB\| = 10$ m, $\|BC\| = 25$ m, se cere: înălțimea statuiei și distanța $d(O, A)$, știind că $\alpha = 15°$.

R. Se va găsi:

$$\|OM\| = \frac{10 \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}; \quad \|OA\| = \frac{10 \operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Pentru cazul particular $\alpha = 15°$; $\|OM\| = \|OA\| = 5(\sqrt{3} + 1)$.

2. Un observator așezat pe malul unei ape, vede un arbore AO plantat pe malul opus, sub un unghi $m(\widehat{AMO}) = 50°$. Depărtîndu-se cu 40 m de mal, unghiul sub care se vede arborele este de $m(\widehat{ANO}) = 25°$. Se cere înălțimea arborelui AO și lățimea apei OM.

R. Se va găsi: $\|OA\| = 40 \sin 50°$; $\|OM\| = 40 \cos 50°$.

3. Un paratrăsnet, înalt de 3 m ($\|AB\| = 3$), se află situat deasupra unei clădiri BC. De la fereastra unei case vecine situată la 6 m deasupra orizontului ($\|DE\| = 6$) și la 15 m depărtare de baza clădirii considerate ($\|CE\| = 15$), paratrăsnetul se vede sub un unghi de 5°. Să se calculeze înălțimea clădirii ($\|BC\| = ?$).

4. Un balon captiv este văzut din 3 puncte A, B, C necoliniare și situate în același plan orizontal, sub unghiurile α, β, γ față de orizont. Cunoscînd laturile a, b, c ale triunghiului ABC, precum și unghiurile α, β, γ, se cere înălțimea $h = \|MO\|$ a balonului.

§ 4. Metode practice de împărțire a unui unghi în trei părți egale

Această problemă cunoscută din antichitate sub denumirea de *„trisecția unghiului"* nu poate fi rezolvată numai cu rigla și compasul.

În desenul tehnic, trisecția unghiului se poate rezolva prin unele metode practice, folosind în afară de riglă și compas și un instrument simplu numit *„trisector"*.

Scanned with OKEN Scanner

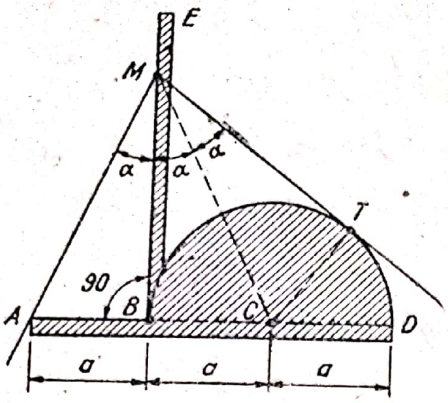


Fig. 109.

1. Un astfel de aparat care se poate vedea în figura 109 se compune din rigla orizontală $|AD|$, rigla verticală

$$|EB| \perp |AD|$$

și semicercul de diametru $||BD||$, construite astfel încît

$$||AB|| = ||BC|| = ||CD|| = a,$$

solidar legate între ele (construite dintr-o singură bucată, executată din material plastic, din metal sau din lemn etc.).

Modul de utilizare. Fie AMT unghiul care urmează să fie împărțit în 3 părți egale. Se așază aparatul astfel încît vîrful M să se așeze pe latura verticală $|EB|$, latura $|MA|$ să treacă prin vîrful A al instrumentului, iar cealaltă latură $|MT|$ să fie tangentă la semicercul cu centrul în C.

Se marchează[1] punctele B și C pe hîrtie și se unesc cu vîrful M. Din egalitatea triunghiurilor:

$$\triangle AMB = \triangle BMC = \triangle CMT,$$

se deduce

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{CMT}) = \alpha.$$

2. Fie xOy unghiul care urmează a fi împărțit în trei părți (fig. 110). Se ia pe latura Oy un punct M, prin care se duce o paralelă la cealaltă latură ($|MB| \,||\, Ox$) și perpendiculara $|MP|$ pe Ox ($|MP| \perp Ox$). Pe marginea rectilinie a unei benzi de carton (sau material plastic), haşurată în figură se marchează două puncte A' și B', astfel încît distanța $||A'B'||$ să fie egală cu $2||OM||$. Se potrivește apoi banda, astfel ca: punctul A' să coincidă cu punctul A situat pe $|MP|$, punctul B' să fie situat pe paralela $|MB|$, iar vîrful O să fie pe prelungirea $|A'B'|$ a benzii.

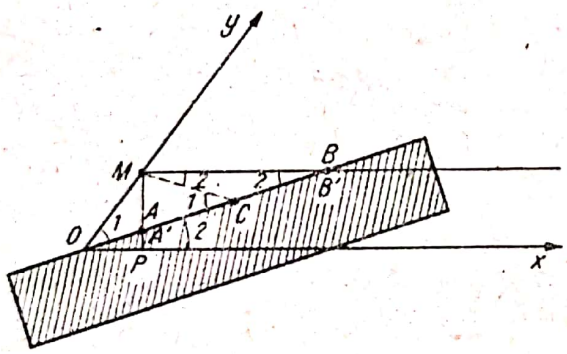


Fig. 110.

Această operație se realizează ușor făcînd să alunece punctul A' pe perpendiculara $|MP|$, iar punctul B' pe paralela $|MB|$, pînă cînd marginea rectilinie a benzii trece prin vîrful O al unghiului.

Se fixează apoi punctul A pe $|MP|$ în dreptul punctului A'. Unghiul $\widehat{POA}$ este o treime din unghiul $\widehat{POM}$, după cum rezultă din următoarele: $\hat{O}_2 = \hat{B}_2$ (ca alterne interne) și, deoarece am luat prin construcție

[1] În centrul cercului C se află un mic orificiu circular pentru a putea marca poziția acestui punct cu vîrful ascuțit al creionului sau vîrful compasului.

Scanned with OKEN Scanner

$||AC|| = ||CB|| = ||OM||$ şi $\widehat{PMB} = 90°$, rezultă că $||MC|| = ||OM||$ şi deci:

$$\hat{O}_1 = \hat{C}_1 = 2\hat{B}_2,\ \hat{O}_1 = 2\hat{O}_2.$$

Pentru ca trisecţia unghiului $\widehat{xOy}$ să fie terminată, urmează ca unghiul $\widehat{AOB}$ să fie împărţit în două părţi egale.

§ 5. Volumul unor corpuri

În practică se întîlnesc corpuri avînd forma unui *obelisc* (fundaţii de piatră sau beton, grămezi de nisip sau prundiş) ca cele din figura 111; sau forma unei *pene* (ce servesc la fixarea a două piese metalice sau de lemn) ca cele din figura 112. Acestea fac parte din categoria de corpuri numită *prismatoizi*.

Un prismatoid este un poliedru avînd bazele două poligoane situate în plane paralele (numărul şi poziţia laturilor fiind oarecare), iar feţele laterale sînt triunghiuri, paralelograme, trapeze sau dreptunghiuri. Suprafeţele laterale sau totale se calculează cu formule cunoscute pentru aria triunghiului, a patrulaterelor, a poligoanelor etc.

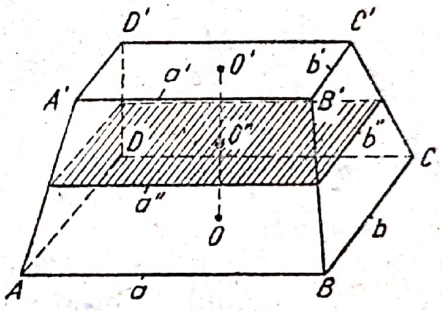


Fig. 111.

Volumul prizmatoidului se calculează cu ajutorul formulei lui Newton-Simpson:

$$V = \frac{h}{6}(B + b + 4B_m), \qquad (1)$$

în care: h = înălţimea; B = aria bazei mari; b = aria bazei mici; B_m = aria secţiunii medii (obţinută prin intersecţia prismatoidului cu un plan paralel cu bazele la egală distanţă de ele).

1. *Volumul obeliscului.* Folosind notaţiile din figura 111, bazele fiind dreptunghiuri, obţinem:

$$B = ab;\ b = a'b';\ a'' = \frac{a + a'}{2};\ b'' = \frac{b + b'}{2};$$

$$B_m = \frac{(a + a')(b + b')}{4};$$

$$V = \frac{h}{6}[2(ab + a'b') + ab' + a'b]. \qquad (2)$$

2. *Volumul unei pene.* O pană (fig. 112) poate fi considerată un prismatoid avînd baza mare trape-

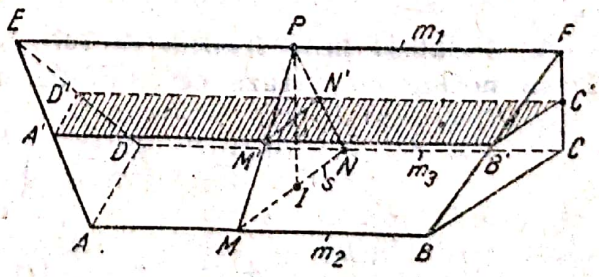


Fig. 112.

zul $ABCD$ de arie $B = (m_2 + m_3) \cdot \|MN\| : 2$, baza mică redusă la muchia m_1, deci $b = 0$, iar baza medie B_m egală cu secțiunea $A'B'C'D'$. Cum $|A'B'|$ și $|D'C'|$ sînt linii mijlocii în trapezul $ABFE$, respectiv în trapezul $DCFE$, iar $\|M'N'\| = \|MN\| : 2$ (fiind linie mijlocie în triunghiul MNP), se obține:

$$B_m = \left(\frac{m_1 + m_2}{2} + \frac{m_1 + m_3}{2}\right) \cdot \frac{\|M'N'\|}{2} = \frac{(2m_1 + m_2 + m_3)}{8} \cdot \|MN\| .$$

$$V = \frac{\|PI\| \cdot \|MN\|}{6} \cdot \left(\frac{m_2 + m_3 + 2m_1 + m_2 + m_3}{2}\right) = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} \cdot S \qquad (3)$$

Deci, volumul unei pene este egal cu media aritmetică a muchiilor laterale, înmulțită cu aria S a secțiunii drepte.

Caz particular des întîlnit în practică, baza este un dreptunghi (fig. 113). În acest caz:

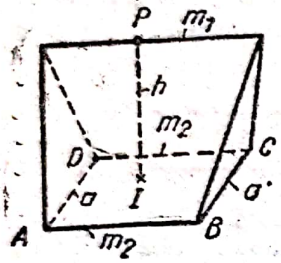


Fig. 113.

$$m_2 = m_3,$$

$$\|PI\| = h,$$

$$\|BC\| = \|AD\| = a;$$

$$V = ah(m_1 + 2m_2) : 6.$$

Observație. Formula lui Newton-Simpson (1) poate servi la calculul volumelor tuturor corpurilor geometrice studiate în liceu, ajungîndu-se ușor la formulele cunoscute.

Vom da cîteva exemple:

1. ***Volumul unui trunchi de piramidă***, cu bazele poligoane regulate. Dacă notăm cu l, L, laturile poligoanelor celor două baze și cu x latura poligonului obținut prin secțiunea medie, obținem:

$$x = \frac{l + L}{2}, \quad \frac{l^2}{L^2} = \frac{b}{B}, \quad \frac{l}{L} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}; \quad \frac{B_m}{B} = \frac{x^2}{L^2} = \frac{(l + L)^2}{4L^2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{l}{2L} + \frac{l^2}{4L^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{b}{B};$$

$4B_m = B + b + 2\sqrt{B \cdot b}$, și formula (1) ne dă:

$$V = \frac{h}{6}(B + b + B + b + 2\sqrt{B \cdot b}) = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{B \cdot b}).$$

2. ***Volumul unui trunchi de con***, avînd bazele cercuri de rază R și r. Dacă notăm cu x raza cercului de secțiune medie, se deduce:

$$x = \frac{R + r}{2}; \quad B_m = \pi\left(\frac{R + r}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(R + r)^2.$$

$$V = \frac{\pi h}{6}\left[R^2 + r^2 + 4 \cdot \frac{1}{4}(R + r)^2\right] = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

Scanned with OKEN Scanner

3. *Volumul sferei.* Cum $B = b = 0$, $B_m = \pi R^2$, $h = 2R$, formula (1) ne dă:

$$V = \frac{2R}{6}(0 + 0 + 4\pi R^2) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3.$$

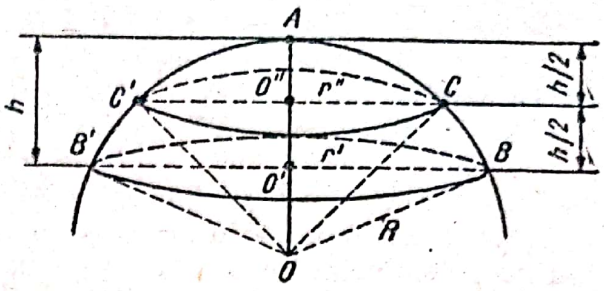


Fig. 114.

4. *Volumul unui segment sferic.* Folosind datele din figura 114, vom putea scrie:

$$V = \frac{h}{6}(\pi r'^2 + 4\pi r''^2).$$

Cum din $\triangle OO'B$ şi $\triangle OO''C$:

$$r'^2 = 2Rh - h^2;\ r''^2 = Rh - \frac{h^2}{4},$$

$$V = \frac{\pi h}{6}(2Rh - h^2 + 4Rh - h^2) = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h).$$

§ 6. Probleme de interpolare

Fenomenele întîlnite în mod curent în practică, în tehnică, în economie etc. se pot exprima printr-o funcţie de una, două sau mai multe variabile.

Aceste funcţii sînt, în marea lor majoritate, funcţii continue în sensul strict matematic.

Aceasta înseamnă că variaţia argumentului cu o cantitate infinit mică va conduce la o variaţie infinit mică a funcţiei.

Principiul continuităţii care stă la baza evoluţiei celor mai multe fenomene întîlnite în practică permite cunoaşterea expresiei analitice a funcţiei care exprimă intensitatea sau mărimea fenomenului cu ajutorul variabilelor de care acel fenomen depinde în mod natural.

Pentru a urmări, de exemplu, mersul unui tren, presiunea din interiorul cilindrului unei maşini cu abur în timpul unui ciclu, intensitatea sunetului sau a luminii produsă de o sursă la diferite distanţe etc., va trebui să se facă o serie de măsurători, sau să se culeagă o serie de date statistice, cu ajutorul cărora se va putea studia fenomenul analizat.

Folosind aceste valori, se întocmesc tabele care cuprind valorile argumentului (adică mărimea cauzei x_i) precum şi valoarea funcţiei (adică mărimea corespunzătoare a fenomenului studiat y_i).

Dacă într-un sistem de coordonate ortogonale xOy se reprezintă grafic punctele $M_i(x_i, y_i)$ şi se unesc printr-o trăsătură continuă, curba obţinută ne va da o imagine aproximativă a fenomenului studiat.

Această aproximaţie va fi cu atît mai bună cu cît distanţa dintre două valori consecutive (x_i, x_{i+1}) va fi mai mică şi deci numărul observaţiilor efectuate cît mai mare.

Practic, numărul observaţiilor este restrîns; de aceea se pune problema de a completa aceste tabele, fie pentru valorile cuprinse între două valori determinate (operaţie care se numeşte interpolare), fie pentru valori situate în afara valorilor date în tabel (operaţie care se numeşte extrapolare).

Pentru ca o astfel de problemă să poată fi rezolvată, se presupune că există o lege după care au loc aceste fenomene.

Interpolarea constă în aflarea acestei legi şi dă posibilitatea de a calcula mărimea fenomenului studiat pentru orice valoare a variabilei cuprinsă într-un anumit domeniu.

În cazul în care fenomenul depinde de o singură variabilă, problema interpolării se poate enunţa astfel:

Fiind date n valori ale argumentului:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

şi valorile corespunzătoare ale funcţiei obţinute în mod experimental prin măsurători, cîntăriri, numărări sau pe baze statistice:

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n,$$

se cere să se găsească valorile funcţiei care corespund unei valori oarecare x a argumentului, cuprinsă în intervalul dat $x \in (x_1, x_n)$.

Ipoteza pe care o vom face asupra funcţiei pe care o căutăm este ca ea să fie continuă şi în acelaşi timp să aibă forma cea mai simplă, adică să fie un polinom.

În calculele practice au căpătat o mare răspîndire metodele de interpolare pentru aproximarea funcţiilor printr-un polinom, care poartă numele de *polinom de interpolare.*

Dacă, de exemplu, graficul întocmit pe baze tabulare (folosind coordonatele punctelor trecute în tabel) seamănă aproximativ cu un arc de parabolă, acea funcţie se va aproxima cu un polinom de gradul doi. În acest scop se vor evalua valorile funcţiei (prin observaţii sau prin măsurători directe) pentru valorile x_0, x_1, x_2 ale variabilei (fig. 115), apoi se va construi polinomul:

$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{4}$$

astfel încît, în punctele x_0, x_1, x_2 să coincidă cu funcţia considerată, adică se vor determina coeficienţii a_0, a_1, a_2 astfel încît să avem satisfăcute condiţiile:

$$P(x_0) = y_0;$$
$$P(x_1) = y_1;$$
$$P(x_2) = y_2.$$

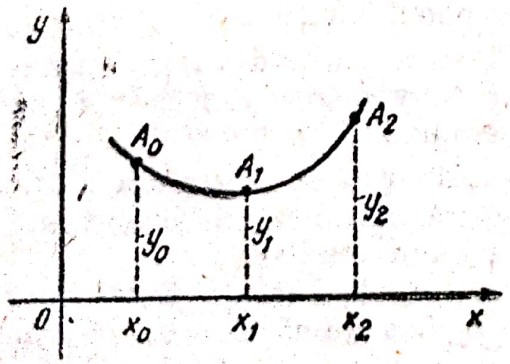


Fig. 115.

În acest scop se formează sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 &= y_0, \\ a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 &= y_1, \\ a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 &= y_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Cum x_i și y_i $(i = 0, 1, 2)$ sînt cunoscute pe baze experimentale (sau din tabele), rezolvarea sistemului (5) ne va da valorile a_0, a_1, a_2 care înlocuite în (4), vor determina expresia polinomului căutat.

Reprezentînd grafic acest polinom, se va putea găsi prin măsurări directe ordonata unui punct oarecare a cărui abscisă este situată în intervalul (x_0, x_2).

În general, dacă aproximarea se face cu ajutorul unui polinom de gradul n, de forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \tag{6}$$

atunci, va trebui să determinăm coeficienții a_0, a_1,..., a_n știind că pentru

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

polinomul $P(x)$ ia valorile:

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Dacă ținem seama de condițiile impuse, se formează sistemul:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_n^1 &= y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n &= y_n. \end{aligned} \tag{7}$$

Cum x_i și y_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sînt cunoscute, soluțiile acestui sistem de $(n + 1)$ ecuații cu $(n + 1)$ necunoscute, ne vor da coeficienții a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ care, introduși în (6), vor determina polinomul dat. Deoarece sistemul (7) are soluție unică, atunci și polinomul găsit va fi unic și bine determinat. Practic, rezolvarea unui sistem de $(n + 1)$ ecuații cu $(n + 1)$ necunoscute este destul de laborioasă mai ales cînd n este mare (de ordinul zecilor).

De aceea, în practică se folosește o formulă cunoscută sub numele de *formula de interpolare a lui Lagrange*, care dă direct polinomul căutat $P(x)$, după înlocuirea lui x_i și y_i în această formulă și efectuarea calculelor.

Pentru a vedea cum se ajunge la această formulă, vom rezolva următoarea problemă:

Să se determine polinomul $P_0(x)$ astfel încît $P_0(x_0) = y_0$ și $P_0(x_i) = 0$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Cum $P_0(x)$ se anulează pentru $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, el va fi divizibil cu $(x - x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, deci și cu produsul

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Rezultă că:

$$P_0(x) = k(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Cum $P_0(x_0) = y_0$, obținem:

$$k(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n) = y_0;$$

$$k = y_0 : (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n),$$

și deci:

$$P_0(x) = \frac{y_0 \cdot (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog se pot determina polinoamele: $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x$ care să fie respectiv egale cu y_1, y_2, ..., y_n, pentru x egal respectiv cu x_1, x_2, ..., x_n și egale cu zero pentru toate celelalte valori. Adică:

$$P_i(x_i) = y_i, \text{ pentru } i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

și $P_i(x) = 0$, pentru $x = x_i$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Se va găsi astfel:

$$P_1(x) = y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)},$$

$$P_2(x) = y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)},$$

. . . . . .

$$P_n(x) = y_n \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})}.$$

Dacă se însumează, se obține *polinomul de interpolare a lui Lagrange*, care se poate scrie prescurtat sub forma:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)} \cdot y_i.$$

Acest polinom care este de gradul n satisface condițiile:

$$P(x_0) = y_0, \; P(x_1) = y_1, \; P(x_2) = y_2, \ldots, P(x_n) = y_n,$$

după cum ușor se poate constata.

Aplicație. Să se determine ecuația spațiului în funcție de timp în mișcarea unui vehicul, știind că în prima oră parcurge 14 km, în ora a doua tot 14 km, în a cincea 7 km și în a opta 21 km. Cum:

$$f(1) = 14, \; f(2) = 14, \; f(5) = 7, \; f(8) = 21 \tag{8}$$

formula lui Lagrange ne dă:

$$f(x) = 14 \cdot \frac{(x - 2)(x - 5)(x - 8)}{(1 - 2)(1 - 5)(1 - 8)} + 14 \cdot \frac{(x - 1)(x - 5)(x - 8)}{(2 - 1)(2 - 5)(2 - 8)} +$$

$$+ 7 \cdot \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 8)}{(5 - 1)(5 - 2)(5 - 8)} + 21 \cdot \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 5)}{(8 - 1)(8 - 2)(8 - 5)};$$

$$f(x) = \frac{1}{12}(3x^3 - 31x^2 + 72x + 124). \tag{9}$$

În ipoteza unei legi polinomiale a spațiului în funcție de timp, ecuația mișcării va fi dată de (9), putînd calcula spațiul parcurs de vehicul în orice altă perioadă de timp.

Dacă se întocmește graficul funcției (9), se vor putea determina cu mai multă ușurință valorile funcției pentru diferitele valori ale variabilei x.

Se va găsi de exemplu, pentru $x = 4$, $f(4) = 9$ km/oră, pentru $x = 10$, $f(10) = 62$ km/oră . . .

Scanned with OKEN Scanner

În acest mod, interpolarea și extrapolarea se poate face direct pe cale grafică, prin simpla măsurare a ordonatelor corespunzătoare absciselor situate în interiorul sau în afara valorilor $x \in [1, 8]$.

Observații. Dacă vom presupune că variația spațiului în funcție de timp este polinomială, și se face după un polinom de gradul 3 de forma:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{10}$$

atunci, condițiile (8) ne conduc la sistemul:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 14 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 14 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 &= 7 \\ a_0 + 8a_1 + 64a_2 + 512a_3 &= 21, \end{aligned} \tag{11}$$

a cărui soluție:

$$a_0 = \frac{124}{12}, \quad a_1 = \frac{72}{12}, \quad a_2 = -\frac{31}{12}, \quad a_3 = \frac{3}{12},$$

introdusă în (10) ne conduce la același rezultat obținut în (9) aplicînd formula lui Lagrange, care evită munca laborioasă, necesară rezolvării sistemului (11), de 4 ecuații liniare cu 4 necunoscute.

Din punct de vedere geometric, problema interpolării se pune astfel: fiind date $(n + 1)$ puncte în plan să se determine ordonata ce corespunde unei abscise date, diferită de a celor $(n + 1)$ puncte.

Cazuri particulare. Dacă se cunosc numai două puncte prin care trece curba, formula lui Lagrange dă:

$$y = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

și reprezintă ecuația unei drepte care trece prin punctele $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$.

Dacă se cunosc 3 puncte prin care trece curba $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ curba va fi o parabolă:

$$y = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Exemple

1. O grindă cu lungimea de 4 m suspendată pe două reazeme este supusă unei sarcini de 1000 kg/m uniform distribuite.

Momentele încovoietoare în secțiunile făcute la 1/4, 1/2 și 3/4 din deschiderea ei sînt egale respectiv cu 1500 kgm, 2000 kgm și 1500 kgm. Să se calculeze prin interpolare momentul de încovoiere la fiecare zecime din deschiderea grinzii[1].

[1] Momentul încovoietor este o funcție de gradul doi de deschiderea x a grinzii: $M(x) = ax^2 + bx + c$.

Scanned with OKEN Scanner

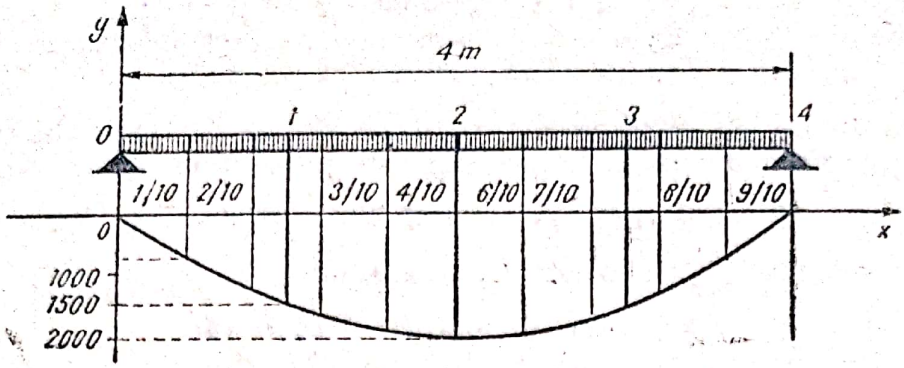


Fig. 116.

Să se întocmească graficul funcţiei obţinute şi să se verifice rezultatele prin interpolare grafică (fig. 116).

Dacă notăm cu $M(x)$ funcţia care dă momentele încovoetoare în grindă pentru o deschidere x din lungimea ei şi ţinem seama că:

$$M(1) = 1500,\ M(2) = 2000,\ M(3) = 1500,$$

formula lui Lagrange ne dă:

$$M(x) = 1500\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 2000\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 1500\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)};$$

$$M(x) = -500x^2 + 2000x.$$

Deoarece funcţia obţinută reprezintă o parabolă simetrică în raport cu dreapta $x = 2(M'(x) = -1000x + 2000 = 0;\ x = 2)$ valorile lui $M(x)$ se vor calcula numai pentru secţiunile făcute la $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$ din deschiderea grinzii.

Cum lungimea grinzii este $l = 4$ m; vom calcula valorile lui $M(x)$ pentru $x_1 = \frac{1}{10}\cdot 4 = \frac{4}{10}$, $x_2 = \frac{2}{10}\cdot 4 = \frac{8}{10}$, $x_3 = \frac{3}{10}\cdot 4 = \frac{12}{10}$, $x_4 = \frac{4}{10}\cdot 4 = \frac{16}{10}$.

$$M\left(\frac{4}{10}\right) = M\left(\frac{36}{10}\right) = 720,\ M\left(\frac{8}{10}\right) = M\left(\frac{32}{10}\right) = 1280,$$

$$M\left(\frac{12}{10}\right) = M\left(\frac{28}{10}\right) = 1680;\ M\left(\frac{16}{10}\right) = M\left(\frac{24}{10}\right) = 1920.$$

Folosind graficul funcţiei $y = 500x^2 - 2000x$ (fig. 116), ordonatele punctelor ce corespund absciselor $x = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$ se pot măsura direct pe grafic.

Dacă parabola este construită corect şi la o scară suficient de mare, se vor putea găsi valorile lui $M(x)$ pentru orice valoare a lui x cuprinsă în intervalul $[0, 4]$ prin simpla măsurare a ordonatelor respective.

Scanned with OKEN Scanner

2. Să se determine expresia intensității curentului electric care va încălzi în vid pînă la temperatura de 2500°K[1] un filament de tungsten a cărui rază este r.

În acest scop s-au făcut următoarele experiențe: prin 4 filamente de raze 0,030; 0,050; 0,080 și 0,100 mm s-au trecut curenți electrici pînă cînd aceste filamente așezate în vid s-au încălzit la 2500°K.

Măsurîndu-se intensitatea acestor curenți, s-au găsit: 0,690; 1,485; 3,000 și 4,200 A.

Să se determine prin interpolare și extrapolare intensitatea curentului corespunzător unui filament de 0,062 mm, respectiv 0,200 mm.

Folosind valorile razelor în microni[2], formula lui Lagrange ne dă:

$$I(r) = \frac{(r-50)(r-80)(r-100)}{(30-50)(30-80)(30-100)} \cdot 0{,}690 +$$

$$+ \frac{(r-30)(r-80)(r-100)}{(50-30)(50-80)(50-100)} \cdot 1{,}485 +$$

$$+ \frac{(r-30)(r-50)(r-100)}{(80-30)(80-50)(80-100)} \cdot 3{,}000 +$$

$$+ \frac{(r-30)(r-50)(r-80)}{(100-20)(100-50)(100-80)} \cdot 4{,}200.$$

Efectuînd calculele, se va găsi o funcție $I(r)$ care este un polinom de gradul 3.

Pentru a obține intensitatea curentului corespunzător filamentului de 0,062 mm = 62 microni, se va calcula I(62) și se va găsi:

$$I(62) = (-0{,}0809 + 1{,}0835 + 1{,}4592 - 0{,}4147)\ \text{A} = 2{,}047\ \text{A}.$$

Deci, pentru ca filamentul de tungsten cu raza de 62 microni să se încălzească la temperatura de 2500°K, va trebui ca prin el să circule un curent de 2,047 A. Din experiențele făcute, aplicînd metodele cunoscute din fizică, rezultă I(62) = 2,048 A, deci o valoare foarte apropiată de cea obținută pe cale experimentală (eroarea este de un miliamper).

Pentru filamentul cu raza de 200 microni se obține:

$$I(200) = (-17{,}70 + 101 - 255 + 183{,}54)\ \text{A} = 11{,}84\ \text{A}.$$

Metoda interpolării este folosită în general la prelucrarea datelor experimentale. Denumirea a fost introdusă de J. Wallis (1656).

---

[1] Temperatura în grade Kelvin se măsoară de la zero absolut și este dată de formula: $T = (t + 273{,}2)$°K, unde t este temperatura în grade Celsius (2500°K = 2226,8°C).

[2] 1 micron = 10^{-3} mm.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VIII.

APLICAȚII ALE NOMOGRAFIEI

Tehnica actuală necesită în toate compartimentele ei de activitate un număr foarte mare de calcule. Aceste calcule, care provin în general din aplicarea unor formule uneori complicate, se făceau în institutele de construcții și proiectări cu multă pierdere de timp din partea celor ce le execută.

De aceea, omul de știință a conceput diferite mijloace practice care să ușureze munca necesară acestor calcule, atît de laborioase, care, prin uniformitatea lor, devin plictisitoare, răpind în același timp mii de ore de lucru care ar putea fi folosite cu succes în alte domenii de activitate.

Printre aceste mijloace, care duc la executarea calculelor cu mai multă ușurință, mărind astfel în mod considerabil *productivitatea muncii*, se află și nomograma, iar știința care se ocupă cu studiul nomogramelor se numește *nomografie*.

Cuvîntul nomografie este compus din cuvintele grecești νομος (*nomos*), care înseamnă *lege*, și γραφειν (*grafein*), care înseamnă *a scrie*, iar nomograma este o reprezentare geometrică a unei relații funcționale între două, trei sau mai multe variabile.

Cunoscînd relația funcțională $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$. se poate construi pentru ea o nomogramă, dacă sînt îndeplinite anumite condiții cu privire la numărul variabilelor și mai ales la forma analitică a funcției.

Scopul esențial al nomogramelor a fost și a rămas același de la începutul existenței lor, cel mai simplu auxiliar de calcul.

Economia de timp realizată prin folosirea lor este apreciabilă, iar faptul că ele pot fi mînuite cu ușurință chiar și de nespecialiști constituie o mare calitate a acestora.

Trebuie să precizăm, de asemenea, că expresia analitică a relației funcționale pentru care se construiește nomograma nu trebuie să fie neapărat rezolvată în raport cu variabila pe care o căutăm. Această condiție nu are, în general, nici o importanță; esențialul este să cunoaștem ecuația care leagă variabilele independente de funcția a cărei valoare este căutată.

Acest fapt constituie un mare avantaj pentru construcția nomogramelor, deoarece uneori explicitarea unei funcții de mai multe variabile în raport cu variabila pe care o căutăm este practic imposibilă, iar alteori, explicitarea funcției constituie însăși rezolvarea problemei.

De exemplu, ecuația de gradul 3 completă:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

se poate rezolva în raport cu x, folosind formula lui Cardan, după ce este adusă la forma[1] $x^3 + px + q = 0$, iar explicitarea ei în raport cu x, adică $x = f(p, q)$, constituie însăşi rezolvarea ecuaţiei.

În nomografie, rezolvarea ecuaţiei complete de gradul 3 este la fel de simplă ca şi a ecuaţiilor:

$$x^4 + nx^2 + px + q = 0,$$

$$x^5 + nx^2 + px + q = 0; \ldots; \quad x^m + nx^2 + px + q = 0.$$

Menţionăm, de asemenea, cu privire la gradul de precizie, că se pot construi astăzi nomograme nu numai cu una sau două, ci chiar cu trei sau cu patru cifre semnificative exacte, ceea ce satisface cu prisosinţă necesităţile practice cele mai exigente; este vorba de nomogramele de mare precizie.

Nomografia este o disciplină care aparţine matematicii aplicate şi datează relativ de scurt timp.

Primele nomograme apărute abia la începutul secolului al XIX-lea au fost **nomogramele reticulare** care şi astăzi sînt cele mai cunoscute şi mai larg răspîndite.

Primele nomograme reticulare apărute au fost acelea formate din reţele de drepte paralele cu axele de coordonate sau care trec prin originea axelor şi dintr-un fascicul de curbe oarecare. Executarea lor se poate baza numai pe reprezentarea unei funcţii de o singură variabilă.

Exemplu: *Să se determine catetele unui triunghi, cînd se cunoaşte ipotenuza şi un unghi, cu ajutorul formulelor:*

$$b = a \cos \varphi, \quad c = a \sin \varphi.$$

Într-un sistem de coordonate carteziene se va desena:

— un fascicul de drepte paralele cu axa Oy, care reprezintă valorile lui b;

— un fascicul de drepte paralele cu axa Ox, care reprezintă valorile lui c;

— un fascicul de drepte care trece prin origine şi care fac cu axa Ox unghiul φ($\varphi = 5°, 10°, 15°, 20°, \ldots, 90°$);

— un fascicul de cercuri concentrice cu centrul în origine, ale căror raze sînt egale cu a.

Atît fasciculele de drepte cît şi fasciculele de cercuri se trasează echidistant între ele (fig. 117).

Dacă a şi φ sînt cunoscute, de exemplu: $a = 85$, $\varphi = 40°$, se va căuta

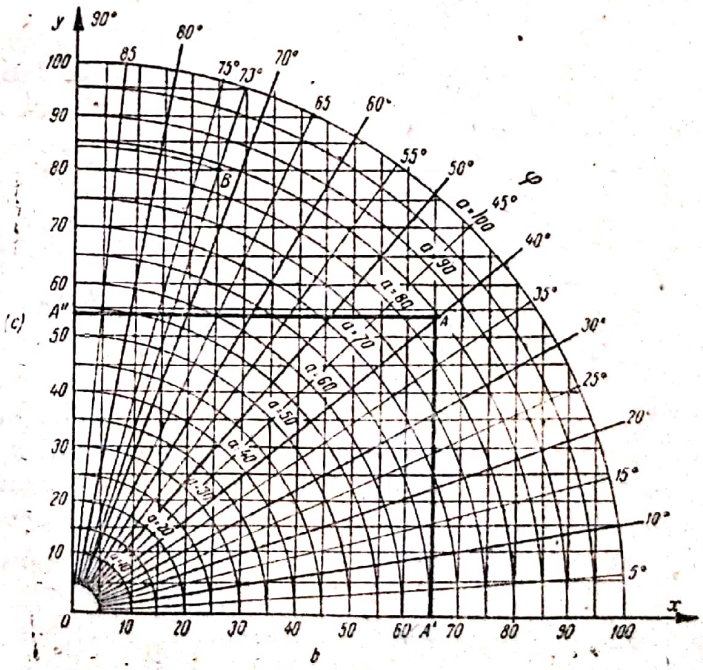


Fig. 117.

[1] Cu ajutorul substituţiei $x = X - \frac{a}{3}$.

punctul de intersecție al cercului de rază $a = 85$ cu dreapta care trece prin origine și face cu axa Ox unghiul $\varphi = 40°$ (punctul A din fig. 117).

Citim valorile lui b și c pe dreptele din fasciculele respective, care trece prin punctul obținut. În exemplul dat $b = 65$, $c = 54$.

Efectuînd calculele exact se constată că $b = 65{,}1$, $c = 54{,}6$ și deci rezultatele citite direct pe nomogramă prezintă o eroare sub 1%. Dacă s-ar fi construit nomograma la o scară mai mare și cu mai multă exactitate, eroarea ar fi fost și mai mică. În practică, în special în construcții, evaluările cu erori sub 1% sînt cu totul satisfăcătoare.

Explicarea rezultatelor este foarte simplă; distanțele $d(O, A')$, $d(O, A'')$, care ne dau valorile lui b și c, reprezintă chiar lungimea celor două catete în triunghiul OAA', a cărui ipotenuză OA este raza cercului cu centrul în origine $\|OA\| = a = 85$, iar unghiul $AOA' = \varphi = 40°$ este unghiul format de ipotenuza $|OA|$ cu axa Ox.

O astfel de nomogramă poate servi la rezolvarea triunghiurilor dreptunghice, în cazul cînd se cunoaște:

— ipotenuza și un unghi, pentru a afla catetele;
— cele două catete b și c, pentru a afla ipotenuza și un unghi;
— o catetă și un unghi, pentru a afla cealaltă catetă și ipotenuza;
— ipotenuza și o catetă, pentru a afla cealaltă catetă și un unghi.

Probleme propuse

1. Într-un triunghi dreptunghic se dau catetele $b = 25$ m și $c = 80$ m. Se cere ipotenuza a și unghiul ascuțit C.

R. $a = 84$, m, $\hat{C} = 73°$.

2. Un triunghi dreptunghic are cateta $c = 75$ m și $\hat{C} = 65°$. Se cere cateta b și ipotenuza a.

R. $b = 35$, $a = 83$.

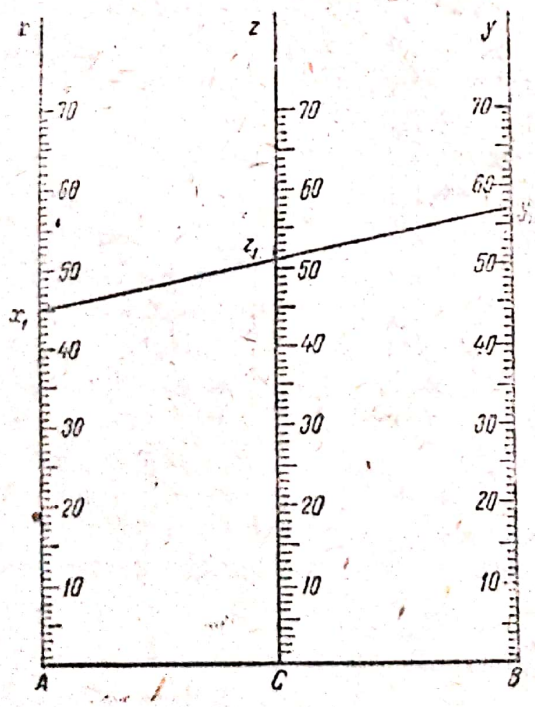


Fig. 118.

3. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza $a = 32$ m și cateta $b = 25$ m; se cere cateta c și unghiul ascuțit C.

R. $c = 20$, $\hat{C} = 38°$.

*
* *

Un alt gen de nomograme este acela elaborat de matematicianul francez Maurice d'Ocagne la sfîrșitul secolului al XIX-lea și se numesc **nomograme cu punctele aliniate și scări rectilinii.**

Exemple: 1. *Nomograma pentru calculul mediei aritmetice a două numere.*

În punctele A, B, C, coliniare și echidistante, se ridică perpendicularele Ax, By, Cz, care se gradează în milimetri (fig. 118).

Dacă se unește punctul x_1, situat pe scara Ax, cu un punct y_1 situat pe scara By, dreapta x_1y_1 va tăia scara Cz într-un punct z_1. Deoarece în trapezul Ax_1y_1B, segmentul Cz_1 este linie mijlocie, există relația[1]:

$$z_1 = \frac{x_1 + y_1}{2}.$$

De exemplu, pentru $x_1 = 45$, $y_1 = 57$, valoarea lui z_1 se poate citi direct pe scara Oz la intersecția acesteia cu dreapta x_1y_1. Se va găsi $z_1 = 51$. Dacă facem calculul, găsim același rezultat:

$$z_1 = \frac{45 + 57}{2} = 51.$$

Dreptele Ax, By, Cz, gradate în mod uniform în milimetri, se numesc *scări rectilinii cu gradație uniformă.*

Deoarece punctele x_1, y_1, z_1 sînt situate pe aceeași dreaptă, nomograma se numește cu puncte aliniate și scări rectilinii echidistante, uniform gradate. Practic, dreapta x_1y_1 nu se trasează pe nomogramă, ci se folosește o riglă transparentă, pe mijlocul căreia se duce o dreaptă colorată. Această riglă se așază pe nomogramă astfel ca dreapta colorată să treacă prin punctele x_1 și y_1. În punctul de intersecție al acestei drepte cu scara Oz se citește rezultatul, adică media aritmetică a numerelor x_1 și y_1.

Pentru o precizie mai mare se vor lua pentru unitate diviziunile intermediare de 2 mm, 3 mm și 4 mm etc., în loc de 1 mm.

În figura 119 se poate vedea o nomogramă care permite calculul mediei aritmetice a două numere în care o diviziune de 1 mm corespunde la 0,25 unități și care este gradată numai pentru numerele de la 5 la 25.

Pe o astfel de nomogramă x_1 se pot citi numere din 3 sau chiar 4 cifre semnificative exacte.

Exemplu: $x_1 = 11{,}25$, $y_1 = 17{,}25$; media aritmetică se citește direct pe scara Oz în punctul z_1 de intersecție al acestei scări cu dreapta x_1y_1. Se va găsi $z_1 = 14{,}25$.

În acest mod se pot realiza nomograme care să corespundă din punctul de vedere al preciziei scopurilor practice pentru care este construită gradația și numai pe intervalul pentru care va fi folosită.

Unitatea de măsură (în exemplul nostru, 4 mm) care corespunde numărului 1 se numește în nomografie *modul.*

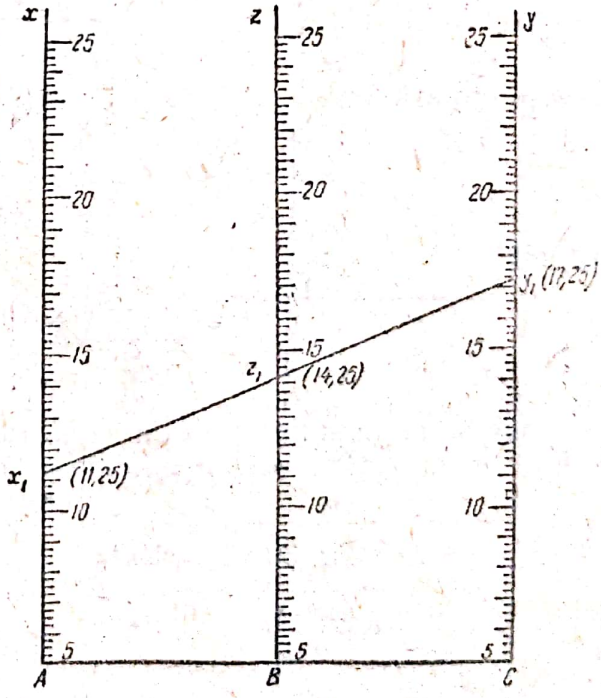


Fig. 119.

[1] Segmentele Ax_1, By_1, Cz_1 le vom nota prescurtat cu x_1, y_1, z_1.

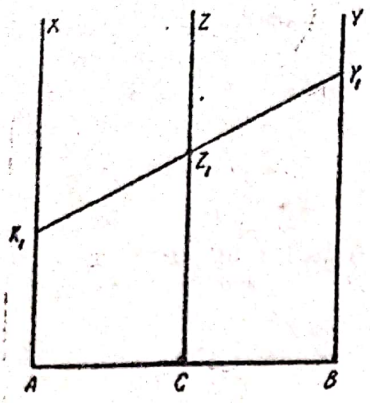


Fig. 120.

Dacă am alege un modul de 10 mm, iar lungimea scării ar fi numai de 10 cm, am putea citi pe ea numai numerele de la 0 la 10 ş.a.m.d.

* * *

Nomogramele cu puncte aliniate şi scări rectilinii se folosesc şi pentru funcţiile de forma:

$$Z(x) = \frac{X(x) + Y(y)}{2}.$$

În acest scop se trasează dreptele paralele echidistante AX, BY, CZ (fig. 120) şi dreapta X_1Y_1, care taie pe CZ în Z_1. Dacă se notează $||AX_1|| = X$, $||BY_1|| = Y$, $||CZ_1|| = Z$, există întotdeauna relaţia:

$$Z = \frac{X + Y}{2},$$

pentru toate punctele coliniare X_1, Y_1, Z_1, situate respectiv pe dreptele AX, BY, CZ.

2. *Nomograma pentru calculul sumei a două numere.*

Se cere să construim o nomogramă pentru formula: $z = x + y$.
Dacă se scrie această formulă sub forma:

$$\frac{z}{2} = \frac{x + y}{2}$$

şi se compară cu

$$Z = \frac{X + Y}{2},$$

atunci:

$$Z = \frac{z}{2}, \quad X = x, \quad Y = y.$$

Dacă se ia modulul egal cu 1, scara lui x şi y se va grada în milimetri şi fiecărei unităţi îi va corespunde 1 mm.

x	0	10	20	30	...	100
X	0	10	20	30	...	100

y	0	10	20	30	...	100
Y	0	10	20	30	...	100

Pentru a construi scara lui z, se ia modulul $\frac{1}{2}$, adică fiecărui milimetru îi corespund două unităţi.

Se gradează scara Oz în milimetri și se scrie în dreptul fiecărei diviziuni un număr de două ori mai mare decît este lungimea segmentului (fig. 121).

Gradația scării lui z se va face după tabela:

z	0	20	40	60	80	100	120	140	160
Z	0	10	20	30	40	50	60	70	80

Diviziunile intermediare se obțin divizînd segmentele în părți egale, deoarece Z variază proporțional cu z.

Exemplu: Dacă $x_1 = 41$, $y_1 = 73$, se obține $z_1 = 114$, număr care se poate citi direct pe scara Cz, la intersecția dreptei x_1y_1 cu această scară.

3. *Nomograma pentru calculul diferenței a două numere*

A scădea două numere, înseamnă a aduna un număr pozitiv cu unul negativ. De aceea se consideră nomograma construită pentru suma a două numere, se prelungesc scările AX, BY, CZ cu lungimi egale în partea opusă și se gradează cu numere negative, păstrînd același modul. În acest mod se obține o nomogramă (fig. 122) nu numai pentru diferența a două numere, ci, în general, pentru suma algebrică a două numere:

$$z = x + y,\ z = x - y,\ z = -x + y,\ z = -x - y,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

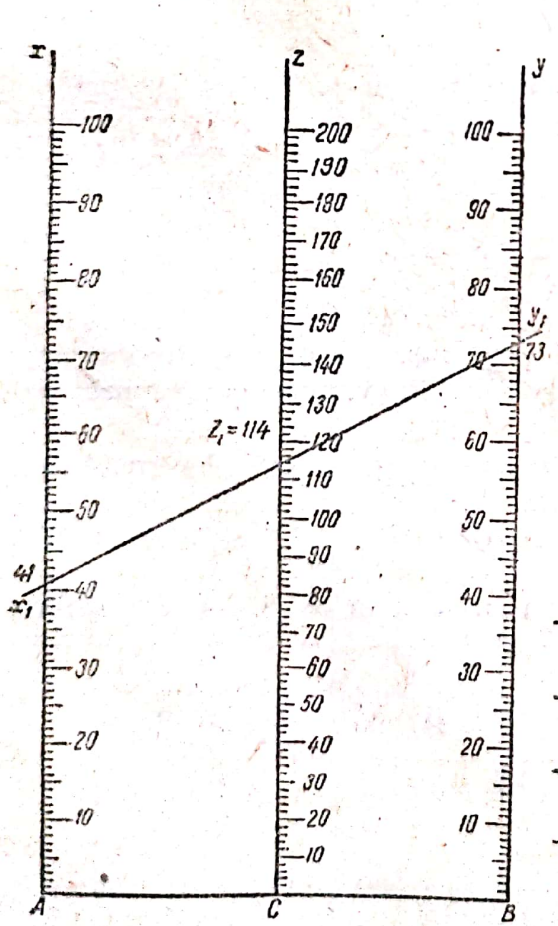


Fig. 121.

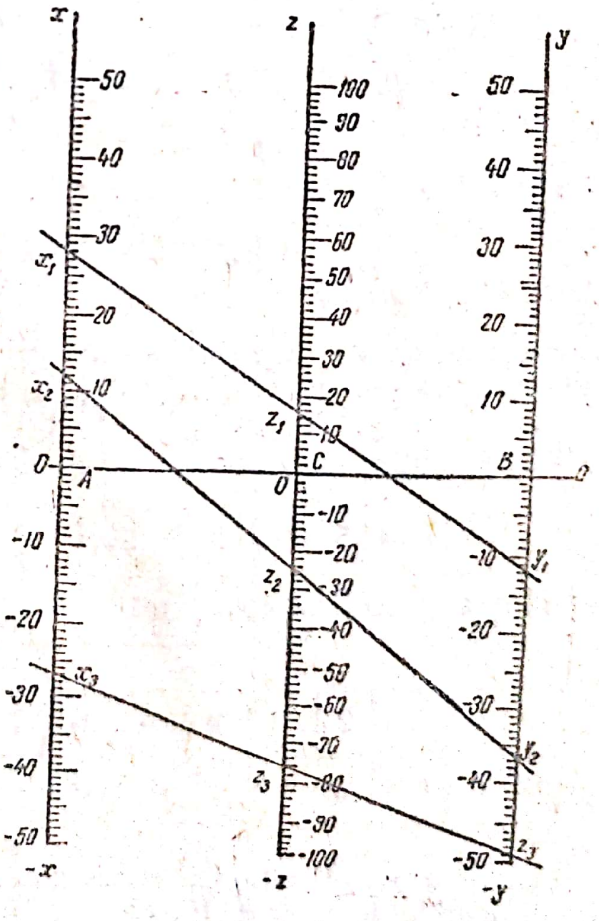


Fig. 122.

Exemple: Să se efectueze diferența: $28 - 12$; rezultatul se va citi direct pe scara Cz în punctul de intersecție al dreptei care trece prin punctele $x_1(28)$, $y_1(-12)$ cu această scară.

Se va găsi $z_1 = 16$ (fig. 122).

Să se calculeze diferența $12-37$; rezultatul se va citi direct pe scara Cz, în punctul de intersecție al dreptei care trece prin punctele $x_2(13)$, $y_2(-37)$ cu această scară. Se va găsi $z_2 = -25$.

Să se calculeze suma $(-27) + (-49)$; rezultatul se citește direct pe scara Cz. Se va găsi $z_3 = -76$.

Observație: În mod analog se pot construi nomograme pentru semisuma algebrică a două numere.

4. Nomograma pentru teorema lui Pitagora.

Pentru determinarea lui z, x sau y din relația:

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

cu ajutorul nomogramei se procedează astfel:

Se pune această relație sub forma:

$$\frac{z^2}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

și se compară cu

$$Z = \frac{X + Y}{2};$$

se găsește:

$$Z = \frac{z^2}{2},\ X = x^2,\ Y = y^2.$$

Folosind aceste egalități, scările lui x, y, z se vor grada, dînd acestor variabile valorile întregi 1, 2, 3, ... și calculînd valorile corespunzătoare lui X, Y, Z.

Se vor obține următoarele tabele care permit gradarea celor trei scări:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Z	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5	32	40,5	50	60,5	72	84,5	98

Pentru scara valorilor lui x și y se va măsura începînd din A, respectiv B, segmentele de 1, 4, 9, 16, 25, ..., 100 mm și se va scrie în dreptul lor 1, 2, 3, 4, ..., 10.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru scara valorilor lui z, se vor măsura începînd din C segmente, de 0,5; 2; 4,5; 8; 12,5; ...; 98 mm şi se va scrie în dreptul lor 1, 2, 3 4, ..., 14.

Se constată că diviziunile intermediare nu se mai pot obţine prin împărţirea în părţi egale; ele se obţin tot prin calcul (fig. 123).

Această nomogramă are gradaţii neuniforme, valorile lui x, y, z nu mai sînt nici egale şi nici proporţionale cu valorile lui X, Y, Z.

O astfel de nomogramă se numeşte *cu puncte aliniate, scări paralele echidistante şi gradaţie neuniformă.*

Exemple: Se dă $x_1 = 8{,}5$, $y_1 = 7{,}6$; ipotenuza $z_1 = 11{,}4$ se citeşte direct pe nomogramă în punctul de intersecţie al dreptei x_1y_1 cu scara Cz (fig. 123).

— Se dă $z_2 = 11{,}8$, $x_2 = 8{,}9$; cateta $y_2 = 7{,}7$ se citeşte pe scara By în punctul de intersecţie al dreptei x_2z_2 cu această scară.

5. *Nomogramele cu scări paralele neechidistante.* Aceste nomograme ne permit să nomografiem o ecuaţie de forma:

$$Z = \frac{nX + mY}{m + n}.$$

Pentru a realiza o astfel de nomogramă, se construiesc dreptele $AX \parallel BY \parallel CZ$, astfel încît $||AC|| = m$, $||BC|| = n$ (fig. 124, *a*).

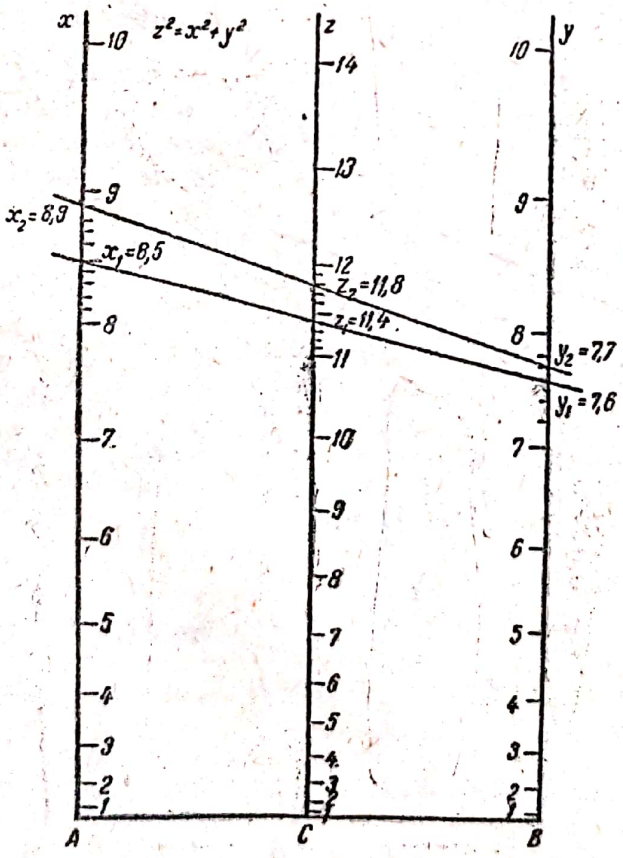
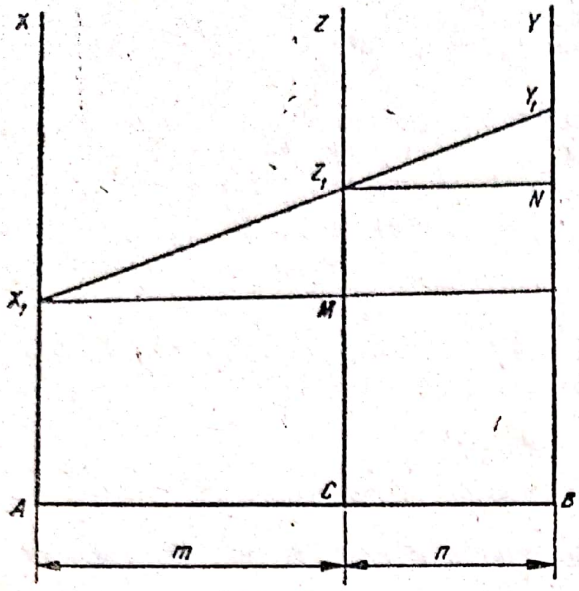
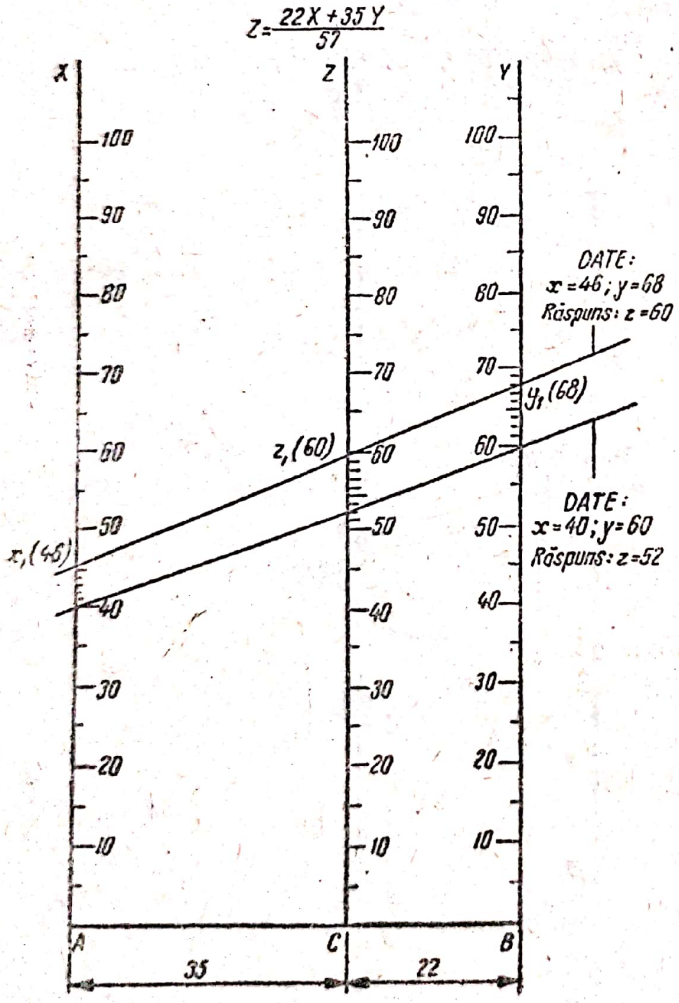


Fig. 123.



a)



b)

Fig. 124.

O dreaptă oarecare taie aceste scări în X_1, Y_1, Z_1. Notînd:

$$||AX_1|| = X,$$
$$||BY_1|| = Y,$$
$$||CZ_1|| = Z$$

din

$$\triangle X_1MZ_1 \sim \triangle Z_1NY_1$$

obţinem:

$$\frac{||MZ_1||}{||NY_1||} = \frac{||MX_1||}{||NZ_1||},$$

$$\frac{Z-X}{Y-Z} = \frac{m}{n},$$

$$Z = \frac{nX+mY}{m+n}.$$

Această formulă permite să se calculeze media aritmetică a două numere X, Y ponderate cu numerele n şi m.

Exemple: 1. *La o fermă agricolă s-au obţinut următoarele recolte 46 q la ha pe un lot de 22 ha şi 68 q la ha pe un lot de 35 ha. Care este recolta medie la hectar provenită din cele două loturi?*

Recolta medie la hectar Z, se obţine calculînd media aritmetică a recoltelor la hectar ponderată cu numărul hectarelor celor două loturi:

$$Z = \frac{22 \cdot X + 35 \cdot Y}{22 + 35},$$

unde

$$X = 46, \quad Y = 68.$$

Pentru această formulă se construieşte o nomogramă cu scări paralele şi neechidistante, luînd: $m = 35$ mm şi $n = 22$ mm; deci pe seg-

mentul $||AB|| = m + n = 57$ mm se ia: $||AC|| = 35$ mm, $||CB|| = 22$ mm şi se duce $AX \parallel BY \parallel CZ$. Comparînd expresia lui Z cu (1) obţinem:

$$X = x,\ Y = y,\ Z = z \text{ şi deci: } z = \frac{22x + 35y}{22 + 35}.$$

Gradaţia celor 3 scări se va face direct în milimetri. Modulul folosit este 1(1 mm corespunde unei unităţi).

Valoarea lui z_1 se citeşte direct pe scara Cz în punctul de intersecţie a acestei scări cu dreapta x_1y_1. Se va găsi $z_1 = 60q$. Valoarea exactă este $59{,}5\,q$. Eroarea este sub 1% (fig. 124, *b*).

2. *Să se nomografieze formula:*

$$S = 2\pi Rh,$$

care ne dă aria laterală a unui cilindru, în funcţie de raza bazei şi înălţimea cilindrului.

Aplicînd logaritmii, se obţine:

$$\lg S = \lg 2\pi + \lg R + \lg h$$

sau

$$\frac{\lg S - \lg 2\pi}{2} = \frac{\lg R + \lg h}{2}.$$

Comparînd cu expresia:

$$Z = \frac{X + Y}{2}$$

rezultă:

$$X = \lg R,\ Y = \lg h,$$

$$Z = \frac{\lg S - \lg 2\pi}{2}.$$

Deci, pentru formula dată se poate construi o nomogramă cu puncte aliniate şi scări echidistante, deoarece $m = n = 1$.

Gradaţia scărilor. Dînd lui R şi h valori întregi de la 1 la 10, se calculează pentru X şi Y logaritmii acestor numere. Pentru a grada scara valorilor lui Z va trebui să se dea lui S valori mai mari decît 2π, pentru ca Z să rezulte pozitiv.

Folosind tabelele de logaritmi, se gradează scara valorilor lui R, h şi S. Luînd ca unitate de măsură 1 dm, se obţine pentru $R = h = 10$ dm, $X = Y = 1$ dm. Scările lui R şi h fiind identice, se poate întocmi pentru ele o singură tabelă.

R (sau h)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X (sau Y)	0	0,3	0,47	0,60	0,7	0,78	0,84	0,90	0,95	1

S	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	300	400	500
Z	0,1	0,185	0,25	0,33	0,4	0,45	0,49	0,52	0,55	0,58	0,6	0,75	0,84	0,9	0,95

Scanned with OKEN Scanner

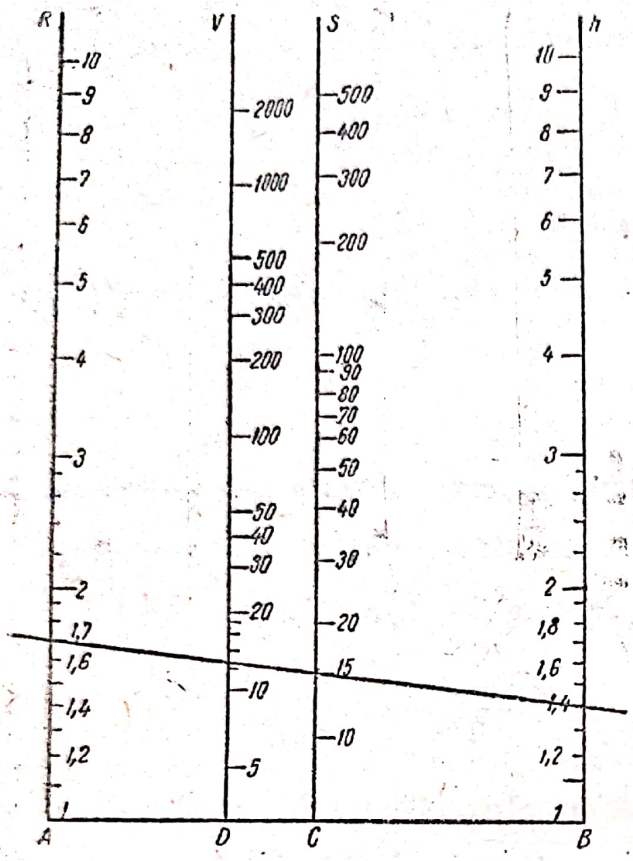


Fig. 125.

Aplicație: Un cilindru are $R = 1{,}7$ dm, $h = 1{,}4$ dm; se cere aria lui laterală.

Răspunsul se citește direct pe nomograma din figura 125: $S = 15$ dm². Rezultatul exact este 14,94 dm²; eroarea este de 0,4%.

Folosind același procedeu, putem nomografia și formula care dă volumul aceluiași cilindru cu raza bazei R și înălțimea h:

$$V = \pi R^2 h.$$

Dacă logaritmăm, obținem:

$$\lg V = \lg \pi + 2 \lg R + \lg h$$

sau

$$\frac{\lg V - \lg \pi}{3} = \frac{2 \lg R + \lg h}{3};$$

scrisă sub această formă și comparată cu:

$$Z = \frac{nX + mY}{n + m}$$

se constată că se poate construi pentru formula volumului o nomogramă cu puncte aliniate și scări paralele neechidistante, luînd $m = 1$, $n = 2$, $X = \lg R$, $Y = \lg h$, $Z = \dfrac{\lg V - \lg \pi}{3}$.

S-a construit această nomogramă pe scheletul nomogramei precedente ($S = 2\pi Rh$), deoarece scările lui R și h sînt identice. Pentru a construi scara lui V, se împarte segmentul $|AB|$ (fig. 125) în trei părți egale, se ia $\|BD\| = 2\|AD\|$ deoarece $\|AD\| = m = 1$ și $\|BD\| = n = 2$ și apoi se ridică în D perpendiculara $|DV|$. Gradația scării lui V s-a realizat dînd lui V valori de la 5 la 2 000.

V	5	10	20	30	40	50	100	200	300	400	500	1 000	2 000
Z	0,067	0,167	0,268	0,327	0,368	0,40	0,50	0,60	0,66	0,70	0,734	0,834	0,935

Aplicație: Pentru $R = 1{,}7$ dm, $h = 1{,}4$ dm, se obține $V = 12{,}7$ dm³.

În acest mod, nomograma din figura 125 ne permite să determinăm simultan aria laterală și volumul unui cilindru cînd se dă raza bazei R și înălțimea h, economisind astfel timpul necesar executării celor 6 operații de înmulțire, necesare calculării lui S și V cu formulele respective.

3. *Să se nomografieze formula care ne dă produsul a două numere:*

$$z = x \cdot y. \qquad (1)$$

Dacă se aplică logaritmii, formula (1) se poate scrie sub forma:

$$\frac{\lg z}{2} = \frac{\lg x + \lg y}{2}, \qquad (2)$$

și notînd:

$$\lg x = X,\ \lg y = Y,\ \frac{\lg z}{2} = Z,$$

formula (2) se va scrie sub forma:

$$Z = \frac{X + Y}{2},$$

pentru care se poate construi o nomogramă cu puncte aliniate, scări paralele echidistante și cu gradații logaritmice. Dînd lui x, y, z, valorile 1; 1,1; 1,2; ..., 2; 3; 4; ...; 10, s-a întocmit tabela următoare:

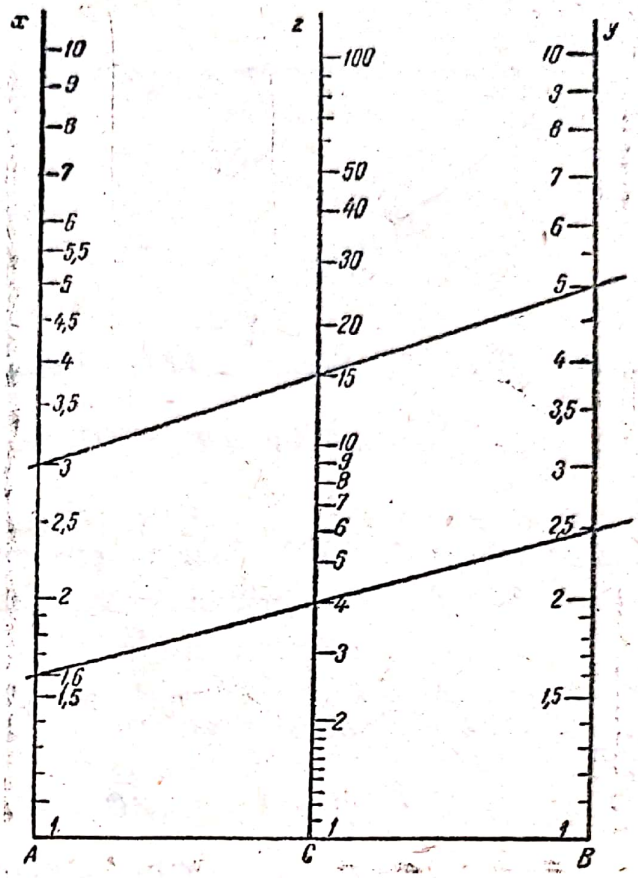


Fig. 126.

x, y, z	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
X, Y	0	0,04	0,08	0,114	0,146	0,176	0,204	0,23	0,255	0,779
Z	0	0,02	0,4	0,057	0,073	0,088	0,10	0,115	0,127	0,14

2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,3	0,47	0,6	0,7	0,78	0,84	0,9	0,99	1
0,15	0,235	0,3	0,35	0,39	0,42	0,45	0,475	0,5

cu ajutorul căreia se gradează cele trei scări x, y, z ale nomogramei din figura 126.

Aplicație: Pentru a înmulți numerele $x_1 = 1{,}6$ și $y_1 = 2{,}5$, rezultatul $z_1 = 4$ se va citi direct pe scara lui z, la intersecția acestei scări cu dreapta x_1y_1 (fig. 126).

Observație: Aceeași nomogramă (fig. 126) servește și la efectuarea împărțirilor. În acest scop vom scrie formula (1) sub forma:

$$x = \frac{z}{y};$$

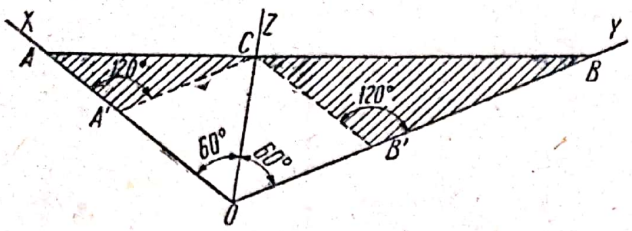


Fig. 127.

pentru $z_1 = 4$ şi $y_1 = 2{,}5$ se va găsi $x_1 = 1{,}6$ la intersecţia dreptei z_1y_1 cu scara lui x.

7. *Nomograme cu puncte aliniate şi scări concurente*

Se construiesc dreptele OX, OY, OZ, care fac între ele unghiuri de 60°; $\widehat{XOZ} = \widehat{ZOY} = 60°$ (fig. 127). Secanta ABC determină pe aceste drepte segmentele

$$\|OA\| = X, \quad \|OB\| = Y, \quad \|OC\| = Z.$$

Dacă se duce: $|CB'| \parallel |OX|$ şi $|CA'| \parallel |OY|$ se formează triunghiurile echilaterale egale $OA'C$ şi $OB'C$, precum şi triunghiurile asemenea, $AA'C$ şi $CB'B$, din care rezultă:

$$\frac{\|A'A\|}{\|CB'\|} = \frac{\|A'C\|}{\|B'B\|};$$

cum

$$\|A'A\| = \|AO\| - \|A'O\| = X - Z,$$

$$\|CB'\| = \|OC\| = Z,$$

$$\|A'C\| = \|OC\| = Z,$$

$$\|B'B\| = \|OB\| - \|OB'\| = Y - Z,$$

proporţia de mai sus devine:

$$\frac{X - Z}{Z} = \frac{Z}{Y - Z}$$

$$(X - Z)(Y - Z) = Z^2,$$

$XY = XZ + YZ$, $\frac{1}{Z} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$, relaţie care arată că o astfel de nomogramă poate servi pentru calculul distanţei focale f din ecuaţia oglinzilor concave sau a rezistenţei echivalente R a unui circuit în care avem montate în paralel două rezistenţe R_1 şi R_2.

În general, o astfel de nomogramă permite rezolvarea unei ecuaţii de forma: $XY = XZ + YZ$, cînd două din cele trei variabile X, Y, Z sînt date.

Dacă X şi Y sînt cunoscute, Z se va afla din formula

$$Z = \frac{X \cdot Y}{X + Y}.$$

Pentru gradaţia celor 3 scări se ia $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, deci gradaţia va fi uniformă. Pentru o precizie mai mare a rezultatelor s-a luat mo-

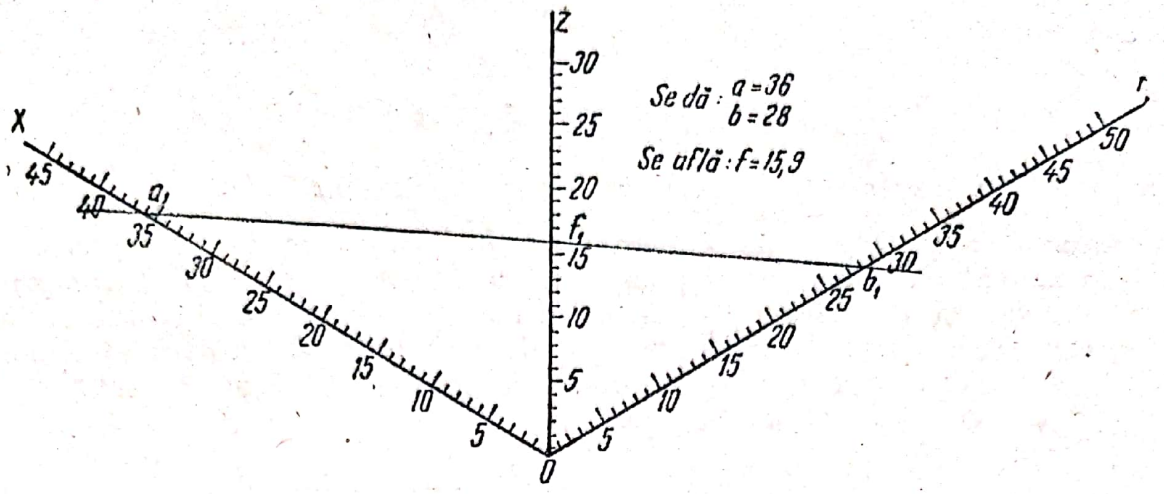


Fig. 128.

dulul 2, adică la fiecare 2 mm corespunde o unitate. Astfel s-a gradat nomograma din figura 128.

Aplicație: Se dă distanța obiectului $a_1 = 36$ cm, distanța imaginii $b_1 = 28$ cm; se cere distanța focală f_1, știind că este dată de formula:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Folosind nomograma din figura 128 se va găsi $f_1 = 15{,}9$ cm, care se poate citi direct pe scara OZ la intersecția ei cu dreapta a_1b_1. Valoarea exactă a lui f_1 calculată cu formula:

$$f_1 = \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1}$$

este de 15,75 cm; eroarea este sub 1%.

8. *Nomograme cu scară oblică*

Printre nomogramele cu puncte aliniate sînt și nomogramele cu scară oblică, cunoscute și sub numele de nomograme în „N".

O nomogramă în „N" se compune din două scări paralele $AD \| CB$ și o scară oblică rectilinie $|AB|$, care unește vîrfurile opuse ale celor două scări paralele (fig. 129).

Aceste nomograme servesc pentru calculul unui produs sau al unui cît de două funcții.

Dacă se notează: $\|AL\| = X$, $\|CB\| = a$, $\|AB\| = b$, $\|CN\| = Y$, $\|AM\| = Z$, din triunghiurile asemenea ALM și MBN se obține:

$$\frac{\|AL\|}{\|NB\|} = \frac{\|AM\|}{\|MB\|},$$

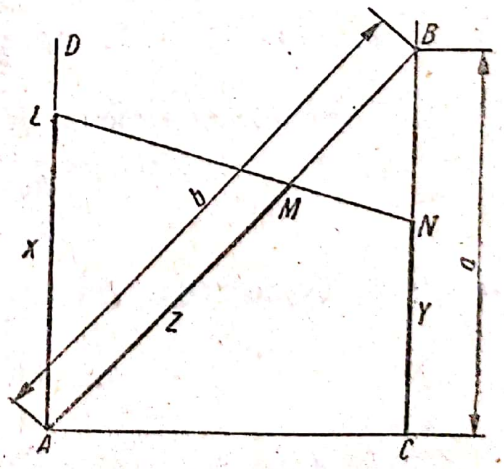


Fig. 129.

sau

$$\frac{X}{a-Y}=\frac{Z}{b-Z},\quad X=\frac{Z}{b-Z}(a-Y),$$

formulă care servește la construirea nomogramelor în „N".

Exemple: 1. *Nomogramă pentru ecuația compresoarelor.* Compresorul este o mașină care servește la comprimarea diferitelor gaze. Dacă comprimăm un gaz, el își mărește presiunea și își micșorează volumul. Dacă avem o compresiune izotermă (fără variație de temperatură), atunci produsul dintre volumul v al gazului și presiunea lui p este constant. În acest caz se aplică legea lui Boyle-Mariotte:

$$p \cdot v = \text{const.}$$

În practică, compresiunea produce căldură și deci legea lui Boyle-Mariotte nu se mai poate aplica. Pe de altă parte, căldura produsă nu poate rămîne în întregime în gaz, o parte din ea se pierde prin radiație. De aceea, în practică, compresiunea se face după formula:

$$p \cdot v^n = \text{const.}$$

și se numește politropă. Exponentul n ia valori cuprinse între $n = 1$ și $n = k$, care corespund unei compresiuni adiabatice (gazul nu cedează și nu absoarbe căldura), pentru aer $1 < n \leqslant 1{,}4$.

Cunoscînd aceste noțiuni, se poate rezolva următoarea problemă:

Într-un compresor, aerul este comprimat de la 1 la 10 atmosfere. Să se calculeze de cîte ori se va micșora volumul, știind că $n = 1{,}2$.

Va trebui să se construiască o nomogramă pentru formula:

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n.$$

Se scrie această relație sub forma:

$$\frac{p_1}{p_2}=\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^n.$$

Logaritmînd:

$$\lg\frac{p_1}{p_2}=n\cdot\lg\frac{v_2}{v}.$$

Dacă se notează pentru prescurtare:

$$\lg\frac{p_1}{p_2}=P,\ \lg\frac{v_2}{v_1}=V,$$

relația de nomografiat devine:

$$V=P\cdot\frac{1}{n}.$$

Pentru a grada scările nomogramei cît mai convenabil, se vor folosi două module p și q.

Scanned with OKEN Scanner

Formula generală a nomogramelor în „N“ se va scrie:

$$p \cdot q \cdot X = \frac{p \cdot Z}{b - Z} \cdot q(a - Y)$$

și, comparînd cu expresia lui V, rezultă:

$$V = p \cdot qX,$$

$$P = \frac{pZ}{b - Z}, \quad \frac{1}{n} = q(a - Y).$$

S-a luat distanța dintre cele două scări paralele $\| AC \| = 7{,}5$ cm; $a = 18$ cm, de unde rezultă (fig. 130).

$$b = \sqrt{7{,}5^2 + 18^2} = 19{,}5 \text{ cm},$$

$$p = 2, \quad q = \frac{1}{18}.$$

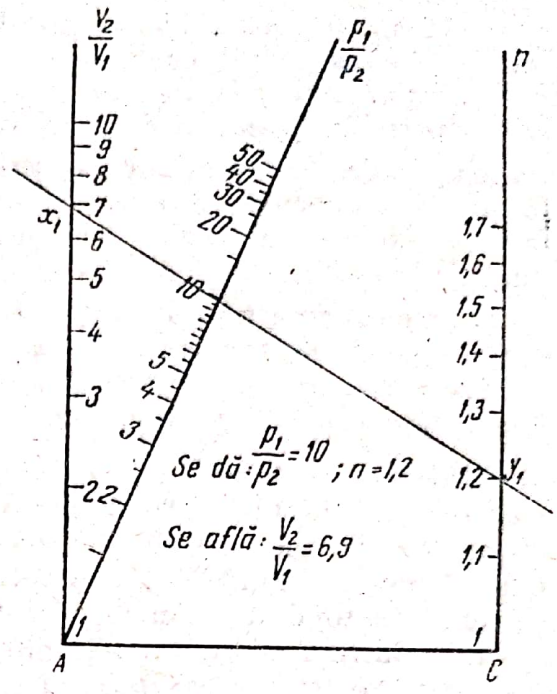


Fig. 130.

Folosind aceste valori pentru a, b, p, q, se obține:

$$X = 9V, \quad Y = 18 - \frac{18}{n}, \quad Z = \frac{19{,}5 \cdot P}{2 + P}.$$

Cu ajutorul acestor formule și ținînd seama de valorile lui P și V,

$$P = \lg \frac{p_1}{p_2}, \quad V = \lg \frac{v_2}{v_1},$$

se pot grada cele 3 scări $\frac{v_2}{v_1}$, n și $\frac{p_1}{p_2}$.

Folosind această nomogramă (fig. 130), răspunsul la problema propusă se poate citi direct pe scara lui $\frac{v_2}{v_1}$, în punctul de intersecție a acestei scări cu dreapta Y_1Z_1, $Y_1(1, 2)$, $Z_1(10)$. Se găsește $\frac{v_2}{v_1} = 6{,}9$; deci, în urma compresiunii de la 1 la 10 atmosfere, volumul gazului se va reduce de 6,9 ori.

Observație: Calculul exact al raportului $\frac{v_2}{v_1}$ se poate face cu ajutorul formulei:

$$\lg \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{n} \cdot \lg \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{1{,}2} \cdot \lg 10 = \frac{1}{1{,}2} = 0{,}83333, \quad \frac{v_2}{v_1} = 6{,}82.$$

Eroarea este 1,2%, deci acceptabilă în practică.

De remarcat este faptul că obținerea rezultatului prin calcul este destul de laborioasă, deoarece necesită, în afară de operațiile de scădere și înmulțire, două operații de logaritmare și antilogaritmare.

Scanned with OKEN Scanner

2. În munca de evidență statistică industrială, nomogramele se folosesc cu succes pentru calcularea și stabilirea rezultatelor necesare analizei indicatorilor care privesc *utilizarea mijloacelor fixe, a mijloacelor circulante și a forței de muncă* a întreprinderilor.

Mijloacele fixe ale unei întreprinderi se compun din mașini-unelte, mașini de transport, diferite instalații fixe, inclusiv clădirile în care sînt instalate și care sînt folosite în mod direct sau indirect la realizarea producției.

Mijloacele fixe se consumă numai parțial în timpul unui ciclu de producție (adică în timpul realizării unității de produs).

Acest consum se explică prin uzura mijlocului fix, datorită utilizării lui în procesul de producție[1].

Mijloacele circulante se compun din materii prime și materiale, combustibili, lubrifianți, precum și alte produse care se consumă în timpul producției, își pierd forma lor naturală și transferă integral valoarea lor noului produs. Sursa bănească necesară formării mijloacelor circulante se numește fond de rulment. Dintre indicatorii utilizării mijloacelor fixe ale unei întreprinderi, un rol important îl joacă *coeficientul procentual al utilizării extensive a utilajului*, U_e, care se calculează cu formula:

$$U_e = \frac{T_e}{T_c} \cdot 100\%, \qquad (1)$$

în care:

T_e este timpul de funcționare efectivă a utilajului în decurs de un an și se exprimă în zile;

T_c — fondul de timp calendaristic exprimat în zile.

Pentru a nomografia formula (1), se scrie sub forma:

$T_e = T_c \cdot \frac{U_e}{100}$ și se compară cu formula generală pentru construirea nomogramelor în „N“:

$$X = \frac{Z}{b - Z} \cdot (a - Y).$$

Rezultă:

$$T_e = X, \quad T_c = a - Y, \quad \frac{U_e}{100} = \frac{Z}{b - Z}.$$

Dacă se ia $||AB|| = 60$ mm, $||BC|| = 80$ mm, $||AC|| = b = 100$ mm, se obține:

$$X = T_e, \quad Y = 80 - T_c, \quad Z = \frac{100\,U_e}{100 + U_e}.$$

[1] Suma de bani necesară înlocuirii mijloacelor se numește amortisment. Fiecare întreprindere își prevede anual în planul de cheltuieli sumele amortizării mijloacelor fixe.

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama că valoarea maximă a indicatorului T_e este 360 (numărul zilelor dintr-un an), s-a ales modulul $\frac{2}{9}$, adică unui milimetru de pe gradaţia scării îi corespund $\frac{9}{2}$ unităţi. În acest mod, pentru 80 mm vor corespunde $80 \times 4{,}5 = 360$ unităţi.

Folosind acest modul, s-au gradat cele 3 scări ale nomogramei (fig. 131).

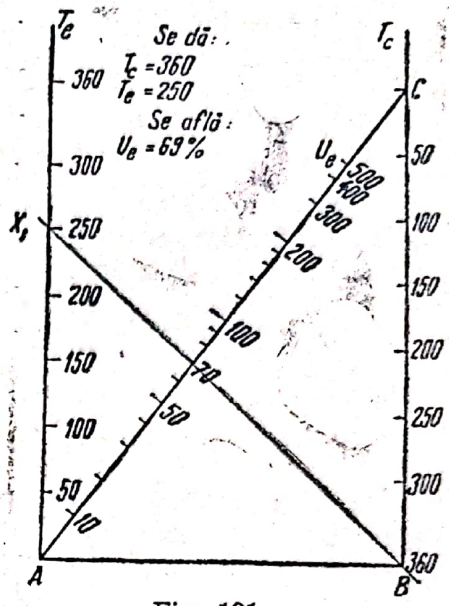


Fig. 131.

Aplicaţie: *În cadrul unei întreprinderi din industria chimică anorganică, o secţie de sodă calcinată a lucrat 250 de zile din totalul fondului de timp calendaristic de 360 de zile. Care este coeficientul utilizării extensive a utilajului?*

Se dă: $T_c = 360$, $T_e = 250$; se cere U_e.

Rezultatul $U_e = 69\%$ se citeşte direct pe scara lui U_e, în punctul de intersecţie al acestei scări cu dreapata X_1Y_1 (fig. 131).

Probleme propuse

1. Să se nomografieze formula: $V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 h$, care dă volumul conului de rază r şi înălţime h.

2. Să se nomografieze formula $V = 2\pi^2 r^2 R$, care dă volumul unui tor, avînd secţiunea circulară de rază r şi raza torului R (fig. 132, a).

3. Să se nomografieze formula $S = \pi^2 \cdot D \cdot d$, care dă suprafaţa torului (fig. 132, a).

4. Să se nomografieze formula $V = \frac{2\pi}{3} \cdot r^2 h$, care dă volumul sectorului sferic de rază r şi înălţime h (fig. 132, b).

5. Să se nomografieze formula $V = \frac{2}{3} r^2 h$, care ne dă volumul unei copite cilindrice (se obţine făcînd într-un cilindru o secţiune cu un plan care trece printr-un diametru al bazei şi face cu baza un unghi α dat de relaţia: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r}$ (fig. 132, c).

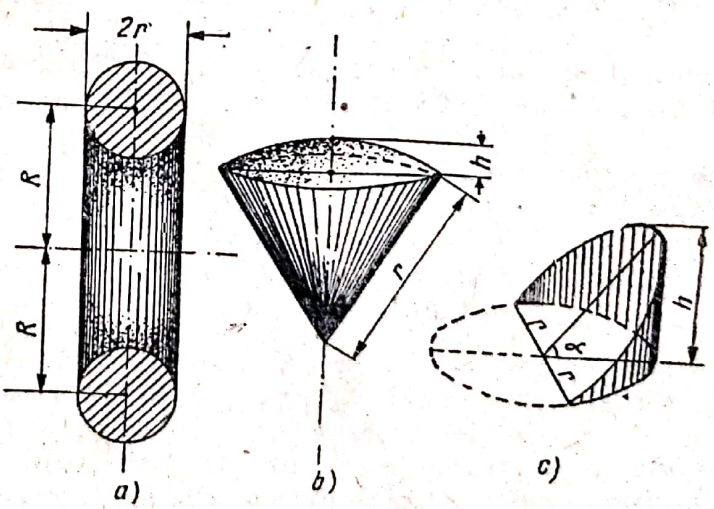


Fig. 132

Indicație: Se va folosi formula generală a nomogramelor în „N" sau formula pentru nomografierea expresiilor de forma:

$$Z = \frac{nX + mY}{m + n},$$

după ce, în prealabil, se vor aplica logaritmii formulelor date.

Pentru nomografierea formulei de la problema 5 se va scrie $\lg V + \lg 3 - \lg 2 = 2 \lg r + \lg h$,

$$Z = \frac{\lg V + \lg 3 - \lg 2}{3}, \quad X = \lg r, \quad Y = \lg h, \quad n = 2, \quad m = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IX.

PROGRAMARE LINIARĂ

Introducere. Procesul de automatizare a producției, care se dezvoltă într-un ritm din ce în ce mai intens în toate ramurile economiei naționale din țara noastră, a început să se extindă în ultimul deceniu și la problemele de planificare și evidență statistică.

Întocmirea unui plan tehnico-economic cît mai apropiat de posibilitățile efective de realizare, necesită o muncă laborioasă și o pricepere deosebită mai ales din cauza numărului mare de indicatori ce concură în mod direct sau indirect la realizarea lui și a interdependenței ce există între ei.

La elaborarea unui plan trebuie să se țină seama de toți factorii ce pot influența indicatorii de bază ai planului, mobilizînd la maximum toate resursele materiale de care dispunem, utilizînd în acest scop cuceririle cele mai avansate ale tehnicii moderne.

Activitatea depusă pentru realizarea unui plan de producție trebuie astfel organizată încît să conducă la obținerea producției într-un timp cît mai scurt (cu o productivitate maximă) cu minimum de cheltuieli (la un preț de cost cît mai redus) menținînd în același timp calitatea produselor și numărul sortimentelor prevăzute în plan. Numai atunci rentabilitatea și beneficiul vor crește mărind astfel fondul de acumulări socialiste, atît de necesar dezvoltării economiei noastre naționale.

Un prim pas pentru realizarea acestui scop, îl constituie aplicarea metodelor statisticii matematice în general și a „programării liniare" în special.

Apărută acum 35 de ani ca o ramură a statisticii matematice, „programarea liniară" s-a dezvoltat necontenit, generînd capitole noi cu multiple aplicații în practică.

Printre acestea citățm: programarea pătratică, hiperbolică, polinomială, exponențială, logaritmică, în numere întregi, stohastică, parametrică, dinamică, programare liniară tridimensională etc.

O problemă de programare liniară poate conduce adesea la o planificare optimă a producției în condițiile unor resurse limitate.

Exemplu. O întreprindere are la dispoziție mai multe resurse (materii prime, materiale, mașini-unelte, forțe de muncă, resurse financiare etc.). Fie $b_1, b_2, \ldots, b_m$ cantitățile disponibile din aceste resurse.

Folosind aceste resurse, întreprinderea trebuie să realizeze n produse diferite. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cantitățile din aceste produse ce urmează a fi realizate și pe care nu le cunoaștem.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm cu a_{ij} cantitatea din resursa i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ necesară realizării unei unități din produsul j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, atunci:

— cantitatea din resursa i necesară realizării cantității x_j va fi $a_{ij}\, x_j$;

— cantitatea totală din resursa i necesară realizării tuturor celor n produse va fi: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$.

Cum această cantitate nu poate depăși cantitatea b_i de care dispunem, apare în mod necesar condiția:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i;\ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1}$$

Cantitățile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din cele n produse nu pot fi decît pozitive sau zero:

$$x_j \geqslant 0; \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Dacă notăm cu c_j prețul de cost pe unitate de produs, atunci costul total al celor n produse va fi:

$$C = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{3}$$

Dacă înlocuim costul c_j cu beneficiul e_j realizat de o unitate din produsul j, atunci funcția (3) devine:

$$B = e_1x_1 + e_2x_2 + \ldots + e_nx_n \tag{4}$$

și reprezintă beneficiul total ce va fi realizat de acea întreprindere. În acest caz, se pune problema de a întocmi un plan de producție, adică de a determina cantitățile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încît funcția (4) să-și atingă valoarea sa maximă, iar condițiile (1) și (2) să fie satisfăcute.

Din mulțimea problemelor practice ce se pot rezolva prin metodele programării liniare, vom mai cita cîteva:

— folosirea optimă a capacității de producție a secțiilor unei întreprinderi, ținînd seama de numărul, tipul și productivitatea mașinilor-unelte și a celorlalte utilaje existente;

— decuparea optimă a materialelor sub diferite forme (bare, foi etc.) în scopul reducerii la maximum a deșeurilor;

— stabilirea poziției de amplasare a unor depozite, a unor magazii de scule, a unor betoniere, în incinta unei fabrici sau a unor șantiere, astfel încît, ținînd seama de poziția centrelor de distribuție, a centrelor de consum și a numărului de transporturi efectuate în unitatea de timp (de exemplu pe zi), distribuția să se facă cu un minim de lucru mecanic, sau într-un timp total minim;

— întocmirea unui plan de transport pentru unele produse omogene (materii prime, materiale de construcții, bunuri de larg consum etc.) de la centrele de producție unde aceste produse sînt disponibile, la centrele de consum unde ele sînt necesare;

— stabilirea poziției de amplasare a conductelor de gaz sau de petrol, a unei conducte electrice de înaltă tensiune, astfel ca suma distanțelor de la punctele de deservire (consum) să fie minimă;

Scanned with OKEN Scanner

— întocmirea unui plan optim de repartizare a mijloacelor de transport existente într-un număr restrîns de centre, în raport cu nevoile de efectuare a unor transporturi de mărfuri (exemplu dirijarea vagoanelor goale din stațiile mari, în stațiile unde urmează a fi încărcate), astfel încît parcursul gol al vagoanelor de marfă să fie redus la minim ;

— întocmirea unui plan pentru transportul unor mari cantități de pămînt, în scopul amenajării unor terenuri plane, cu un consum minim de moto. km sau moto. ore ;

— stabilirea rației furajere optime la animale, adică determinarea cantităților diferitelor furaje ce trebuie să intre în compunerea unei rații zilnice, astfel încît principiile nutritive să fie respectate, iar costul rației să fie minim ;

— repartizarea culturilor pe grupe de fertilitate, astfel încît, ținînd seama de producția medie și de cheltuielile ce revin la ha, planul de producție să se realizeze cel puțin în cantitățile prevăzute la fiecare cultură, cu un total minim de cheltuieli (sau cu un beneficiu total maxim) ;

— repartizarea optimă a parcului de tractoare și mașini agricole de diferite tipuri, astfel încît, ținînd seama de numărul și productivitatea fiecărui tip de tractor pentru diferite munci agricole, întreaga activitate agricolă să se realizeze cu un număr minim de tractoare (sau cu un total minim de cheltuieli) ;

— întocmirea unui plan optim de repartiție a îngrășămintelor chimice, ținînd seama de felul culturii, gradul de fertilitate a diferitelor categorii de soluri, suprafețele corespunzătoare și de cantitatea totală de îngrășăminte existentă (ce va fi livrată conform planului în perioada respectivă) ;

— întocmirea unui plan optim de fabricație pentru mai multe produse, care urmează a fi prelucrate la un număr oarecare de mașini, astfel încît ciclul total de fabricație să fie minim (reducînd la minim întreruperile în timpul funcționării mașinilor, precum și timpul de așteptare a produselor ce urmează a fi prelucrate).

§ 1. Modelul matematic al unui program liniar

Definiție. O problemă de programare liniară (sau program liniar) se poate enunța astfel :

Să se determine numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care să *maximizeze* o funcție liniară[1] de forma :

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1}$$

și să satisfacă condițiile :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m \end{aligned} \tag{2}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 ;\ m < n \tag{3}$$

a_{ij}, b_i, c_j fiind numere reale date.

[1] O funcție $f(x)$ este liniară dacă verifică relația :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) ;\ \text{unde } \lambda, \mu \in \mathbf{R} ;$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) ;\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia (1) a cărei maxim se cere se numeşte *funcţie obiectiv* (scop, criteriu, de eficienţă, de optimizat etc.). Sistemul de inecuaţii (2) reprezintă *restricţiile problemei*, iar (3) se numesc *condiţii de nenegativitate*[1].

Relaţiile (1), (2), (3) care reprezintă modelul matematic al unei probleme de programare liniară se pot scrie şi sub forma prescurtată:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

În cazul în care se cere minimul funcţiei f, restricţiile trebuie satisfăcute cu semnul $\geqslant$. Programul liniar va fi de forma:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{5}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Clasificarea soluţiilor

— Un sistem de n numere reale x_j ce satisfac (2) şi (3) se numeşte *soluţie admisibilă* (posibilă, realizabilă).

— Dacă printre cele n numere reale ce satisfac (2) avem şi $x_j < 0$ (condiţiile (3) nu sînt satisfăcute), soluţia se numeşte neadmisibilă (nerealizabilă).

— Un sistem de m valori $x_j \geqslant 0$, şi de $n - m$ valori $x_j = 0$, care verifică sistemul (2), se numeşte *soluţie de bază admisibilă*.

— O soluţie de bază admisibilă care conţine m valori $x_j > 0$ şi $n - m$ valori $x_j = 0$, se numeşte *soluţie de bază admisibilă nedegenerată*.

— O soluţie admisibilă care conţine $m - r$ valori $x_j > 0$, se numeşte *soluţie de bază admisibilă degenerată* ($r \geqslant 1$, se numeşte ordinul de degenerare[2]).

— O soluţie de bază admisibilă pentru care funcţia obiectiv devine maximă (sau minimă) se numeşte *soluţie optimă*.

Forma standard a unui program liniar.

Sistemul de inecuaţii (care reprezintă restricţiile problemei) poate fi transformat într-un sistem de ecuaţii cu ajutorul unor *variabile ecart* (auxiliare, de compensare, de abatere).

---

[1] În problemele practice de programare liniară, soluţiile care conţin valori $x < 0$, sînt lipsite de sens.

[2] Pentru $r = 1, 2, \ldots$, vom spune că avem o degenerare simplă, dublă, ..., multiplă de ordinul r.

Scanned with OKEN Scanner

— Pentru problema (4) unde se presupune $b_i > 0$, adunăm cîte o variabilă ecart $x_i' \geq 0$ în membrul stîng al inecuației i și sistemul de inecuații devine:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_i' = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$x_j, x_i' \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

— Pentru problema (5), se scade cîte o variabilă ecart din membrul stîng al fiecărei inecuații și se obține sistemul de ecuații:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_i' = b_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$x_j, x_i' \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Programele (4) și (5) se vor scrie sub forma:

$$\max \sum_{j=1} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_i' = b_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4'}$$
$$x_j, x_i' \geq 0; \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\min \sum_{j=1}^{n} x_j c_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_i' = b_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{5'}$$
$$x_j, x_i' \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Programele (4) și (5) se mai numesc și *programe liniare canonice*, iar (4') și (5') *programe liniare standard*. Un program liniar *canonic* poate fi deci adus la forma *standard* dacă se adaugă, respectiv se scade o variabilă ecart ($x_i' \geq 0$) din membrul stîng al fiecărei inecuații, care reprezintă restricțiile problemei.

Variabilele ecart se notează uneori și cu altă literă $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sau cu aceeași literă, indicii fiind numerotați în continuare: $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$.

§ 2. Rezolvarea programelor liniare prin metoda descrierii totale

Vom presupune programul liniar adus la forma standard. Restricțiile problemei formează în acest caz un sistem de m ecuații cu n necunoscute ($m < n$):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1}$$

Să presupunem acum că rang $A = m$; aceasta înseamnă că există determinanți de ordinul m diferiți de zero, ce se pot forma cu elementele matricei A.

Scanned with OKEN Scanner

Fie:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0$$

un astfel de determinant. Sistemul (1) se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 - (a_{1,m+1}\, x_{m+1} + \dots + a_{1n}\, x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 - (a_{2,m+1}\, x_{m+1} + \dots + a_{2n}\, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m &= b_m - (a_{m,m+1}\, x_{m+1} + \dots + a_{mn}\, x_n) \end{aligned} \quad (1')$$

în care $x_1, x_2, \dots, x_m$ sînt necunoscutele principale, iar $x_{m+1}, \dots, x_n$ necunoscutele secundare ale sistemului.

Pentru a obține o soluție de bază a sistemului (1′), vom anula necunoscutele secundare, adică vom presupune:

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0.$$

Se obține astfel sistemul:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m &= b_m, \end{aligned} \quad (1'')$$

care este compatibil determinat deoarece am presupus $|A| \neq 0$. Dacă soluția acestui sistem $\bar{x}_j$; $j = 1, 2, \dots, m$, va conține numai valori $\bar{x}_j \geqslant 0$, ea va constitui o soluție de bază admisibilă.

Această soluție este:

— nedegenerată dacă conține m valori $\bar{x}_j > 0$;

— degenerată dacă conține $m - r$ valori $\bar{x}_j > 0$, celelalte fiind nule ($r \geqslant 1$).

Dacă toți determinanții de ordinul m ce se pot forma cu cele n coloane ale matricei A sînt diferiți de zero, se vor obține cel mult C_n^m soluții de bază (admisibile sau nu).

Rezultă că numărul maxim al soluțiilor de bază este C_n^m și se obțin din (1) anulînd pe rînd cîte $n - m$ din cele n necunoscute.

Dacă vom determina în acest mod toate soluțiile de bază, iar pe acelea admisibile le vom introduce în funcția scop, vom ști care din ele este optimă (maximă sau minimă).

Acest mod de a determina soluția (soluțiile) optime constituie o metodă de rezolvare a programelor liniare, cunoscută sub numele de *metoda descrierii totale.*

Exemplu. Să se rezolve programul liniar:

$$\begin{aligned} f = x_1 + x_2 &= \min \\ 2x_1 + 4x_2 &\geqslant 5 \\ 2x_1 + x_2 &\geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Soluție. Introducînd variabilele ecart x_3 și x_4 se obține programul liniar standard:

$$\begin{aligned} f = \; & x_1 + x_2 = \min \\ & 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ & x_j \geqslant 0\,;\; j = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

Cum $m = 2\,;\ n = 4\,;$ vom avea cel mult $C_4^2 = 6$ soluții de bază. Anulînd pe rînd cîte două din cele 4 necunoscute $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,$ se obțin cele 6 soluții de bază trecute în tabela:

Nr. crt.	Baza	x_1	x_2	x_3	x_4	f	natura soluției
1	x_1x_2	1/2	1	0	0	3/2	minimă
2	x_1x_3	1	0	−4	0	—	neadmisibilă
3	x_1x_4	5/2	0	0	3	5/2	maximă
4	x_2x_3	0	2	3	0	2	admisibilă
5	x_2x_4	0	5/4	0	−3/4	—	neadmisibilă
6	x_3x_4	0	0	−5	−2	—	neadmisibilă

Se constată că 1, 3, 4 sînt soluții admisibile, dintre care 1 este minimă, iar 3 este maximă.

$$\min f = \frac{3}{2},\ \text{pentru}\ \ x_1 = \frac{1}{2}\,;\ x_2 = 1.$$

Celelalte soluții: 2, 5, 6 sînt soluții de bază neadmisibile.

Observație. Cînd m și n sînt mari, C_n^m crește foarte mult.

În problemele practice de programare liniară în care m și n sînt de ordinul zecilor, metoda descrierii totale devine foarte laborioasă și nu poate fi aplicată într-un timp rezonabil, chiar dacă am folosi mașini electronice de calcul perfecționate.

Dacă de exemplu, am avea $m = 10\,;\ n = 40,$ ar trebui să rezolvăm $C_{40}^{10} = 847\,660\,528$ sisteme liniare de 10 ecuații cu 10 necunoscute, apoi să calculăm valoarea funcției scop ce corespunde tuturor soluțiilor admisibile.

§ 3. Interpretarea geometrică a programelor liniare

Pentru interpretarea geometrică vom considera următorul program liniar canonic cu două variabile:

$$\begin{aligned} \max\ & (3x_1 + 2x_2) \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 10 \qquad (1) \\ & x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \qquad (2) \\ & 4x_1 - x_2 \geqslant 5 \qquad (3) \\ & x_1 \geqslant 0\,;\ x_2 \geqslant 0. \qquad (4) \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

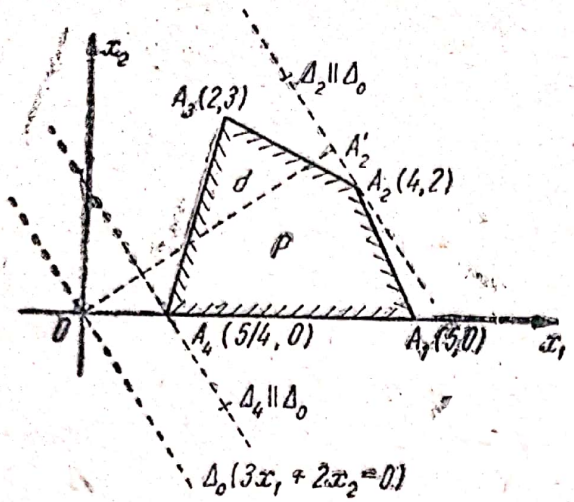


Fig. 133.

Într-un reper cartezian x_1Ox_2 construim dreptele:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 10 && (A_1A_2)\\ x_1 + 2x_2 &= 8 && (A_2A_3)\\ 4x_1 - x_2 &= 5. && (A_3A_4) \end{aligned}$$

Folosind apoi teoremele cu privire la separarea planului în regiuni de către o dreaptă, stabilim regiunea din plan în care sînt verificate toate inecuațiile (1) . . . (4).

Se obține poligonul convex $A_1A_2A_3A_4$. Fiecărui punct situat în interiorul și pe laturile lui îi corespunde o soluție admisibilă. Poligonul P astfel construit se mai numește și poligonul soluțiilor admisibile (fig. 133).

Ne propunem acum să determinăm din mulțimea soluțiilor admisibile, numai *soluțiile admisibile de bază*.

În acest scop, transformăm programul canonic într-un program standard, introducînd cîte o variabilă ecart în fiecare din cele 3 inecuații. Se obține următorul program liniar:

$$\max\ (3x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 10 && (1')\\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8 && (2')\\ 4x_1 - x_2 - x_5 &= 5 && (3')\\ x_j \geqslant 0;\quad j &= 1, 2, \ldots, 5. && (4') \end{aligned}$$

Folosind metoda descrierii totale se determină mulțimea tuturor soluțiilor de bază. Cu $m = 3$, $n = 5$, se pot forma $C_n^m = C_5^3 = 10$ sisteme liniare de 3 ecuații cu 3 necunoscute.

În tabela de mai jos au fost trecute numai soluțiile de bază admisibile, precum și valorile corespunzătoare funcției scop.

Nr.	Baza	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Valoarea funcției scop
1	$x_1x_4x_5$	5	0	0	3	15	15
2	$x_1x_2x_5$	4	2	0	0	9	16 (max)
3	$x_1x_2x_3$	2	3	3	0	0	12
4	$x_1x_3x_4$	5/4	0	15/2	27/4	0	15/4(min)

Din datele obținute în tabelă și din figura 133 se constată că fiecărei perechi de valori (x_1, x_2) ce aparțin unei soluții de bază admisibile îi corespunde un vîrf al poligonului P și invers, fiecărui vîrf îi corespunde o pereche de valori (x_1, x_2) ce aparține unei soluții de bază admisibile.

Există deci o corespondență biunivocă între soluțiile de bază admisibile obținute în acest mod și vîrfurile poligonului P.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a determina acum $\max f$, să observăm că ecuația

$$3x_1 + 2x_2 - f = 0 \tag{5}$$

reprezintă un fascicul de drepte paralele cu dreapta

$$(\Delta_0) \quad 3x_1 + 2x_2 = 0,$$

iar distanța de la originea O a reperului la dreapta (5) este dată de formula:

$$d = \frac{|-f|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{f}{\sqrt{13}}; \quad f = \sqrt{13} \cdot d.$$

Rezultă că funcția scop devine maximă odată cu distanța d. Cum dreapta (5) trebuie să aibă cel puțin un punct comun cu poligonul P, vom deplasa dreapta Δ_0 paralel cu ea însăși pînă cînd va trece prin vîrful A_2, cel mai depărtat de dreapta Δ_0. Vîrful $A_2(4, 2)$ corespunde unui *maxim*:

$$\max f = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16; \quad \hat{x}_1 = 4; \quad \hat{x}_2 = 2.$$

Vîrful $A_4(5/4,0)$ cel mai apropiat de dreapta Δ_0 corespunde unui *minim*:

$$\min f = 3\frac{5}{4} + 2 \cdot 0 = \frac{15}{4}; \quad \hat{x}_1 = \frac{5}{4}; \quad \hat{x}_2 = 0.$$

În general, dacă poligonul soluțiilor admisibile este nevid și mărginit, funcția scop își atinge valoarea sa optimă (maximă sau minimă) în una din soluțiile admisibile de bază, adică într-un vîrf al poligonului P al soluțiilor.

Pentru a obține soluția optimă a unui program liniar care conține m inecuații cu două necunoscute adică are una din formule:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 = \min; \qquad f = c_1x_1 + c_2x_2 = \max.$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geqslant b_i; \qquad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_1 \geqslant 0; \; x_2 \geqslant 0; \qquad x_1 \geqslant 0; \; x_2 \geqslant 0;$$

procedăm astfel:

— construim poligonul convex P al soluțiilor admisibile definit de restricțiile problemei. Acest poligon va fi situat în cadranul întîi (deoarece $x_1 \geqslant 0$; $x_2 \geqslant 0$) și va avea cel mult p laturi ($p \leqslant m + 2$);

— construim dreapta $\Delta_0 : c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, ce trece prin originea reperului;

— deplasăm dreapta Δ_0 paralel cu ea însăși pînă întîlnește primul vîrf al poligonului P. Acest vîrf fiind cel mai apropiat de dreapta Δ_0, coordonatele lui conduc la un minim al funcției scop (deoarece $\min f = k \cdot \min d$; $k = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$);

— deplasăm apoi dreapta Δ_0 paralel cu ea însăși pînă va trece prin vîrful cel mai depărtat de dreapta Δ_0. Coordonatele lui conduc la un maxim al funcției scop (deoarece $\max f = k \cdot \max d$).

Scanned with OKEN Scanner

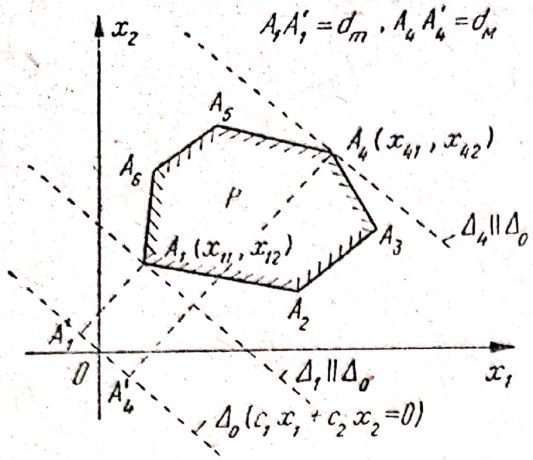


Fig. 134.

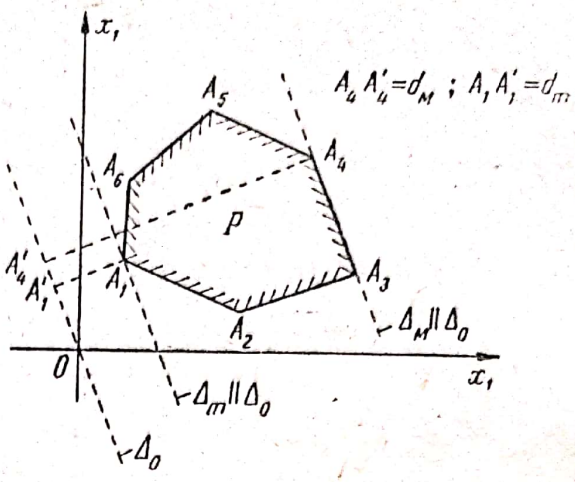


Fig. 135.

Situația se va prezenta ca în figura 134.
Vîrful $A_1(x_{11}, x_{12})$ corespunde unui minim:

$$\min f = c_1x_{11} + c_2x_{12}\,;\ A_1A_1' = d_m.$$

Vîrful $A_4(x_{41}, x_{42})$ corespunde unui maxim:

$$\max f = c_1x_{41} + c_2x_{42}\,;\ A_4A_4' = d_M.$$

— Dacă una din laturile poligonului P este paralelă cu dreapta Δ_0, atunci vom avea satisfăcută una din relațiile:

$$\frac{c_1}{a_{i1}} = \frac{c_2}{a_{i2}}\ ;\ \text{pentru un } i = 1, 2, \ldots, m.$$

În acest caz, problema poate admite:
— o infinitate de soluții de maxim și un minim (fig. 135);
— o infinitate de soluții de minim și un maxim (fig. 136);
— o infinitate de maxime și o infinitate de minime (fig. 137);

Mulțimea soluțiilor optime vor fi date de coordonatele tuturor punctelor situate pe acea latură a poligonului P care este paralelă cu dreapta Δ_0.

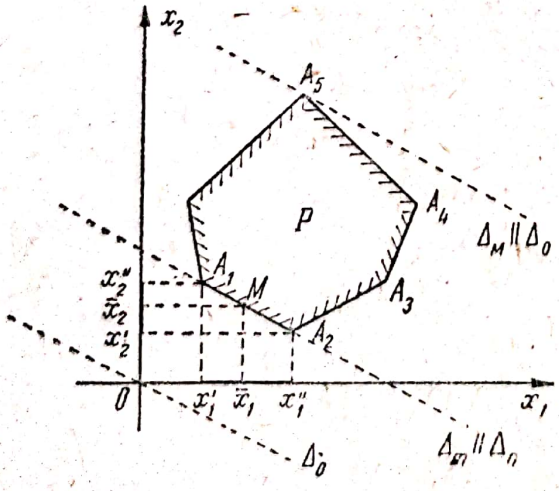


Fig. 136.

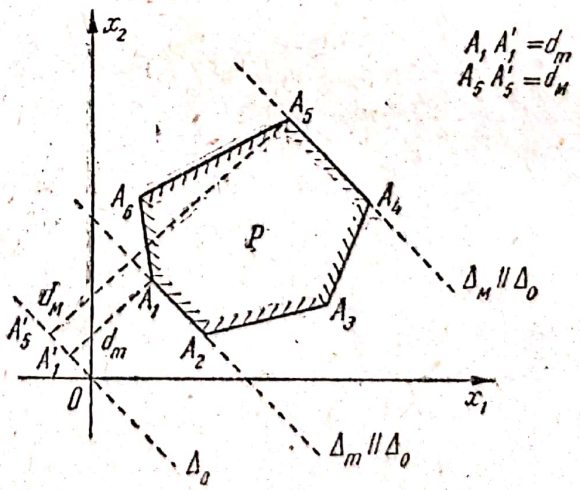


Fig. 137.

Scanned with OKEN Scanner

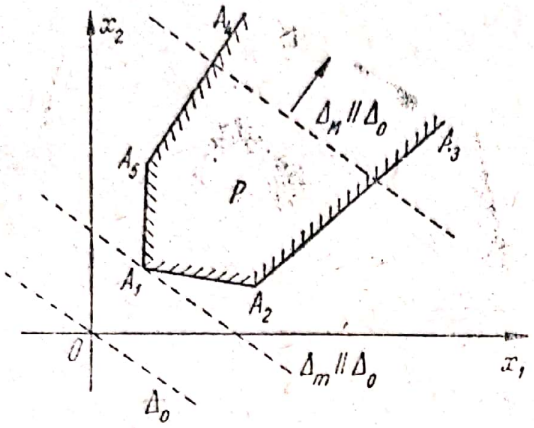


Fig. 138.

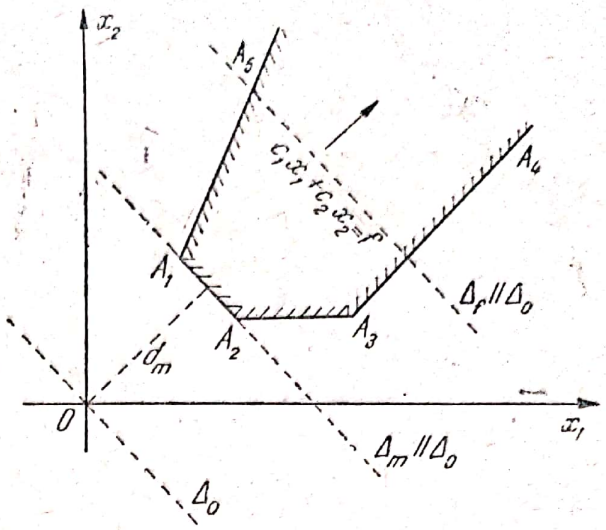


Fig. 139.

De exemplu, în figura 136, $\min f$ este dat de coordonatele $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ale punctelor situate pe dreapta A_1A_2 : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$.

Aceste coordonate trebuie să satisfacă în mod evident relaţiile :

$$a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 = b_1$$

$$x_1' \leqslant \bar{x}_1 \leqslant x_1''$$

$$x_2' \leqslant \bar{x}_2 \leqslant x_2''$$

Cum $\min f = kd_m$, acest minim nu depinde de poziţia punctelor situate pe dreapta A_1A_2, ci numai de distanţa $d_m = \| A_2A_2' \|$, care este aceeaşi deoarece $\Delta_m \| \Delta_0$ prin ipoteză.

— Dacă poligonul P este nemărginit (are puncte la infinit) problema poate admite :

— o soluţie maximă infinită şi un minim unic (fig. 138),

— o soluţie maximă infinită şi o infinitate de minime (fig. 139).

În astfel de cazuri funcţia scop poate creşte oricît fără a avea un maxim finit, sau poate descreşte oricît fără a avea un minim finit.

Exemplu. Se cere maximul şi minimul funcţiei :

$$f = x_1 + x_2$$

$$2x_1 - x_2 \leqslant 2$$

$$x_1 - 2x_2 \leqslant 2$$

$$x_1 + x_2 \geqslant 5$$

$$x_1 \geqslant 0\,;\ x_2 \geqslant 0.$$

Din figura 140 se constată că mulţimea soluţiilor admisibile este situată în interiorul şi pe laturile poligonului nemărginit P delimitat de dreptele A_1A_2, A_1A_4, A_2A_3.

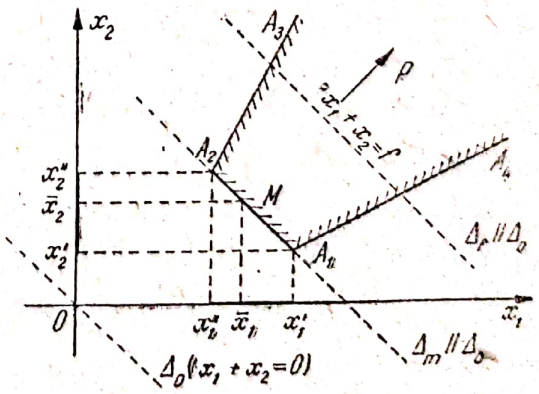


Fig. 140.

Funcția scop poate lua valori oricît de mari, deoarece deplasînd dreapta $x_1 + x_2 - f = 0$, paralel cu ea însăși, oricît de departe de origine, vom avea în tot timpul puncte comune cu poligonul soluțiilor. Maximul funcției f este deci infinit.

Problema admite o infinitate de soluții de minim și anume mulțimea punctelor situate pe latura $|A_1A_2| \parallel \triangle_2$, care conduc la aceeași valoare minimă a funcției scop; $\min f = 5$.

Mulțimea acestor soluții $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ sînt o combinație liniară convexă de coordonatele celor două vîrfuri $A_1(x_1', x_2')$; $A_2(x_1'', x_2'')$ adică sînt de forma:

$$\bar{x}_1 = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_1''$$

$$\bar{x}_2 = \lambda_1 x_2' + \lambda_2 x_2''$$

în care λ_1, λ_2 satisfac relațiile:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1].$$

Justificare. Dacă notăm cu k raportul în care punctul M împarte segmentul A_1A_2, vom putea scrie:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1' + kx_1''}{1+k} = \frac{1}{1+k}x_1' + \frac{k}{1+k}x_1'' = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_1''$$

$$\bar{x}_2 = \frac{x_2' + kx_2''}{1+k} = \frac{1}{1+k}x_2' + \frac{k}{1+k}x_2'' = \lambda_1 x_2' + \lambda_2 x_2''.$$

Cînd punctul M descrie segmentul $|A_1A_2|$; $k \in [0, \infty]$; iar λ_1 și λ_2 satisfac relațiile: $\lambda_1 \in [1, 0]$; $\lambda_2 \in [0, 1]$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Cum în exemplul dat avem $A_1(4, 1)$; $A_2\left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$, coordonatele punctelor de minim vor fi:

$$\bar{x}_1 = 4\lambda_1 + \frac{7}{3}\lambda_2$$

$$\bar{x}_2 = \lambda_1 + \frac{8}{3}\lambda_2; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]; \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$\min f = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \lambda_1(4+1) + \lambda_2\left(\frac{7}{3} + \frac{8}{3}\right) = 5(\lambda_1 + \lambda_2) = 5.$$

— Dacă poligonul P se reduce la un punct, maximul și minimul funcției au aceeași valoare.

Exemplu. Se cere maximul și minimul funcției:

$$f = x_1 + 2x_2$$
$$-x_1 + x_2 \leqslant 1$$
$$3x_1 - x_2 \leqslant 3$$
$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 12$$
$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

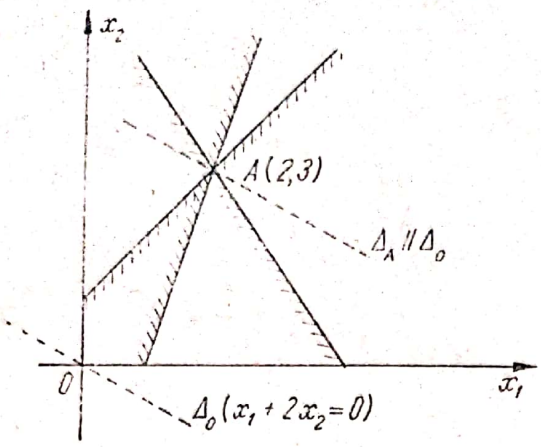


Fig. 141.

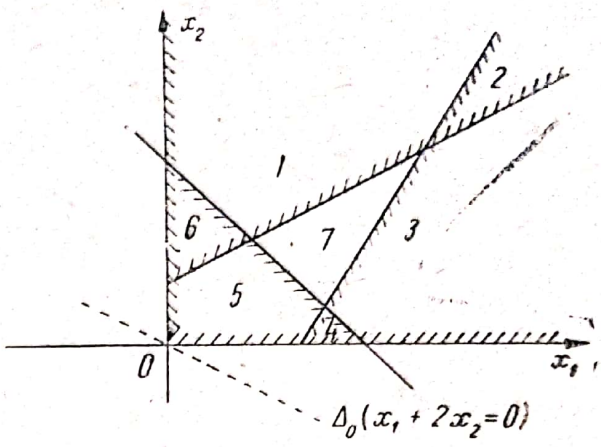


Fig. 142.

Din figura 141 se constată că poligonul soluțiilor se reduce la punctul $A(2, 3)$; $\max f = \min f = 8$. Probleme practice de acest fel sînt lipsite de sens.

— Dacă poligonul soluțiilor admisibile este vid, programul liniar nu are soluții. Sistemul de inecuații este incompatibil, restricțiile problemei sînt contradictorii.

Exemplu. Se cere maximul și minimul funcției:

$$f = x_1 + 2x_2$$
$$-x_1 + 2x_2 \geqslant 2$$
$$3x_1 - 2x_2 \geqslant 6$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 3$$
$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.$$

Din figura 142 se constată că poligonul soluțiilor admisibile este vid. Sistemul de inecuații este incompatibil. În nici una din cele 7 regiuni nu avem satisfăcute simultan toate restricțiile problemei. Programul dat nu admite soluții.

Interpretarea geometrică a programelor liniare care conțin m inecuații cu două necunoscute ne permite să tragem următoarele concluzii:

— Sistemul de restricții determină în R^2 într-un reper cartezian (Ox_1x_2), un poligon convex și mărginit (sau nemărginit) delimitat de p drepte $(p \leqslant m + 2)$, situat în cadranul întîi, numit poligonul soluțiilor admisibile.

— Dacă poligonul soluțiilor este nevid, fiecărui vîrf îi corespunde o soluție admisibilă de bază.

— Dacă acest poligon este mărginit, funcția scop își atinge valoarea optimă (maximă sau minimă) într-o soluție admisibilă de bază, adică într-un vîrf al poligonului.

— Dacă funcția scop își atinge valoarea sa optimă (maximă sau minimă) în două vîrfuri, atunci ea are aceeași valoare optimă în orice punct al segmentului care unește cele două vîrfuri. Programul admite în acest caz o infinitate de soluții optime.

— Dacă poligonul soluțiilor admisibile este nemărginit, funcția scop poate avea o valoare optimă infinită.

— Dacă poligonul soluțiilor este vid, programul liniar nu are soluții. Sistemul de restricții este contradictoriu.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple din diferite sectoare de activitate:

1. *Planificarea optimă a producției la o întreprindere industrială.* O fabrică și-a prevăzut în planul de producție două tipuri de aparate speciale P_1 și P_2. Materialele și materia primă necesară confecționării acestor aparate se află în cantități suficiente, dar capacitatea de producție este limitată și imprimă producției următoarele restricții:

— Capacitatea de producție permite realizarea în unitate de timp (pe zi) a pieselor necesare pentru cel puțin 60 aparate de tipul P_1 și 40 de tipul P_2.

— Capacitatea de montaj este de cel mult 70 aparate de ambele tipuri P_1 sau P_2 în aceeași unitate de timp (una zi).

— Numărul aparatelor de tipul P_1 trebuie să fie conform planului, de cel puțin 25 bucăți/zi, iar pentru acelea de tipul P_2 de cel puțin 14 bucăți pe zi.

Un aparat de tipul P_1 costă 40 lei, iar de tipul P_2, 80 lei. Se cere să se determine planul zilnic de producție la acea fabrică astfel încît totalul cheltuielilor necesare realizării acestui plan să fie minim.

Soluție. Dacă notăm cu x_1 și x_2 numărul de aparate de tipul P_1, respectiv P_2, ce urmează a fi prevăzut în planul zilnic de producție, condițiile problemei ne conduc la următorul program liniar:

$$f = 40x_1 + 80x_2 = \min$$
$$\frac{x_1}{60} + \frac{x_2}{40} \geqslant 1$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 70$$
$$x_1 \geqslant 25\,; \quad x_2 \geqslant 14$$

a cărui interpretare este evidentă.

Construind dreptele:

$$2x_1 + 3x_2 = 120 \qquad (D_1)$$
$$x_1 + x_2 = 70 \qquad (D_2)$$
$$x_1 = 25 \qquad (D_3)$$
$$x_2 = 14 \qquad (D_4)$$

se constată că restricțiile problemei sînt satisfăcute în interiorul și pe laturile poligonului convex și mărginit $ABCD$.

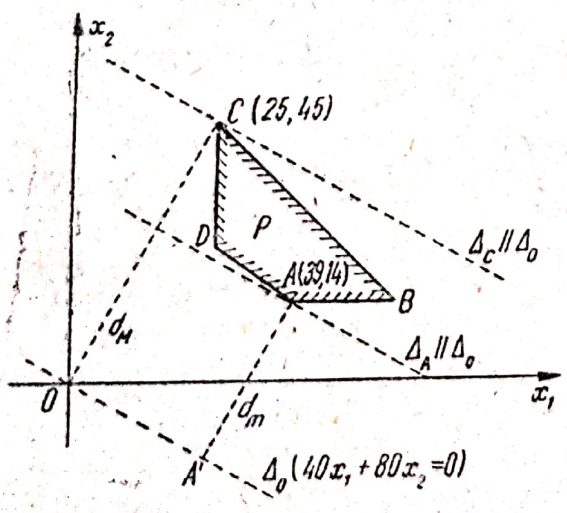


Fig. 143.

Problema admite 4 soluții admisibile de bază, date de coordonatele vîrfurilor $ABCD$ (fig. 143).

Construind apoi și dreapta $\Delta_0(40x_1 + 80x_2 = 0)$ se constată că vîrful A de coordonate: $x_1 = 39$; $x_2 = 14$, corespunde unui minim:

$$\min f = 40 \cdot 39 + 80 \cdot 14 = 2680.$$

Concluzie. Acea fabrică va trebui să-și prevadă în plan o producție zilnică de 39 aparate de tipul P_1 și 14 aparate de tipul P_2.

Scanned with OKEN Scanner

În acest mod toate restricțiile problemei vor fi satisfăcute, iar totalul cheltuielilor necesare realizării planului de producție va fi minim și egal cu 2680 lei/zi.

Un alt plan care să se realizeze cu un volum mai mic de cheltuieli în condițiile date nu poate exista.

Observații: Vîrfului C, cel mai depărtat de dreapta $\triangle_0$ îi corespunde un maxim. Coordonatele punctului C:

$$x_1 = 25\,;\ x_2 = 45$$

maximizează funcția scop.

$$\max f = 40 \cdot 25 + 80 \cdot 45 = 4600.$$

Dacă vom planifica o producție zilnică de 25 aparate de tipul P_1 și 45 de tipul P_2, planul de producție se va realiza cu un total maxim de cheltuieli în valoare de 4600 lei/zi.

Dacă beneficiul realizat este de 20% din prețul de cost, adică este de 8 lei, respectiv 16 lei pentru cele două tipuri de aparate și se cere un plan de producție care să conducă la un beneficiu maxim, atunci va trebui să planificăm 25 aparate de tipul P_1 și 45 de tipul P_2. În această ipoteză se va realiza un beneficiu maxim de: $8 \cdot 25 + 16 \cdot 45 = 920$ lei/zi, iar totalul cheltuielilor va fi de 4600 lei/zi.

2. *Determinarea compoziției optime a amestecurilor furajere.* Se știe că fiecare animal are nevoie de anumite cantități minime de principii nutritive în unitatea de timp (de exemplu pe zi) care depind de specia din care face parte, vîrsta, masa animalului, scopul urmărit în alimentație etc.

Principiile nutritive se află în diferite proporții în produsele ce compun rația furajeră.

Exemple:

— un kg de ovăz conține 1,1 g proteină; 5,9 g valină; 7,8 g leucină;

— un kg tărițe de grîu conține 1,58 g proteină; 7,7 g valină; 9,5 g leucină; 5,7 g lizină etc.

Problema cere să se determine cantitățile din fiecare fel de furaj, care trebuie să intre în rația furajeră zilnică a unui animal, astfel încît să i se asigure cel puțin cantitățile minime necesare din fiecare principiu nutritiv, iar costul acestei rații să fie minim.

Privind problema rației furajere sub aspectul ei general, vom presupune că avem n feluri de alimente diferite care conțin m principii nutritive:

A_j; $(j = 1, 2, \ldots, n)$, denumirea alimentelor (furajelor) de care dispunem pentru obținerea rației furajere;

P_i; $(i = 1, 2, \ldots, m)$, denumirea principiilor nutritive conținute în cele n alimente;

a_{ij}; cantitatea din principiul nutritiv i conținut într-o unitate din alimentul j (kg);

b_i; cantitatea minimă din principiul nutritiv i, care trebuie să o conțină rația furajeră (kg);

c_j; costul unei unități din alimentul j (lei/kg);

x_j; cantitatea din alimentul j care trebuie să intre în compoziția rației furajere (kg).

Folosind aceste notații se obține programul liniar:

$$C = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min.$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m$$
$$x_j \geqslant 0;\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Aplicație. Se cunosc datele din tabela:

P_i \ A_j	A_1	A_2	b_i
P_1	0,1	0	0,4
P_2	0	0,1	0,6
P_3	0,1	0,2	2
P_4	0,2	0,1	1,7
c_j	2,4	0,8	—

Se cere să se determine cantitățile x_1 și x_2 din alimentele A_1 și A_2, ce trebuie să intre în compoziția rației furajere a unui animal, astfel încît costul ei să fie minim.

Se obține următorul program liniar:

$$C = 2,4x_1 + 0,8x_2 = \min.$$
$$0,1x_1 \geqslant 0,4$$
$$0,1x_2 \geqslant 0,6$$
$$0,1x_1 + 0,2x_2 \geqslant 2$$
$$0,2x_1 + 0,1x_2 \geqslant 1,7$$

care se mai poate scrie și sub forma:

$$C = 0,8(3x_1 + x_2) = \min.$$
$$x_1 \geqslant 4$$
$$x_2 \geqslant 6$$
$$x_1 + 2x_2 \geqslant 20$$
$$2x_1 + x_2 \geqslant 17.$$

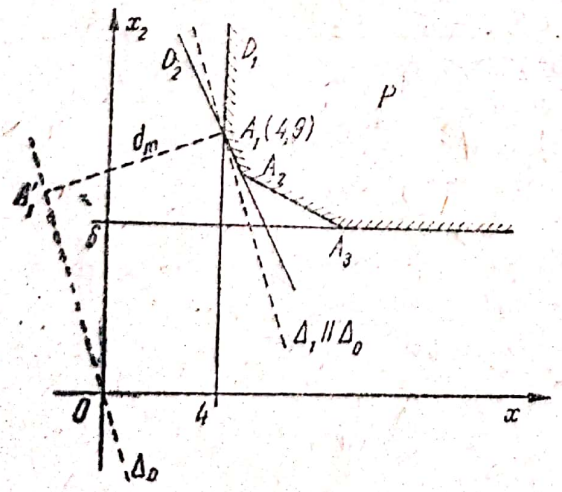


Fig. 144.

Din figura 144 se constată că poligonul P al soluțiilor admisibile este

nemărginit. Vîrful A_1 cel mai apropiat de dreapta $\Delta_0(3x_1 + x_2 = 0)$, minimizează funcţia obiectiv C. Vîrful A_1 fiind la intersecţia dreptelor:

$$x_1 = 4; \qquad (D_1)$$
$$2x_1 + x_2 = 17; \quad (D_2)$$

se obţine soluţia: $x_1 = 4$; $x_2 = 9$; $\min C = 2{,}4 \cdot 4 + 0{,}8 \cdot 9 = 16{,}8$.

Concluzie. Raţia furajeră va trebui să conţină: 4 kg din alimentul A_1 şi 9 kg din alimentul A_2. În acest mod vom avea asigurate:

$0{,}1x_1 = 0{,}1 \cdot 4 = 0{,}4$ kg din principiul nutritiv P_1 (exact cantitatea prescrisă);

$0{,}1x_2 = 0{,}1 \cdot 9 = 0{,}9$ kg din principiul nutritiv P_2 (un plus de 0,3 kg faţă de cantitatea prescrisă);

$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 = 0{,}1 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 9 = 2{,}2$ kg din principiul nutritiv P_3 (un plus de 0,2 kg faţă de cantitatea prescrisă);

$0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 = 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot 9 = 1{,}7$ kg din principiul nutritiv P_4 (exact cantitatea prescrisă).

Toate condiţiile problemei vor fi satisfăcute, iar costul raţiei furajere va fi minim şi egal cu 16,8 lei.

3. *Determinarea meniului optim (problema nutriţiei).* Se ştie că viaţa unui om este condiţionată de anumite cantităţi minime de principii nutritive: calorii, hidrocarburi, vitamine etc. Acestea se află în proporţii diferite în alimentele pe care le consumă.

Totalul acestor cantităţi este calculat pe baze ştiinţifice pentru un organism sănătos pentru diferite vîrste, ţinînd seama de eforturile la care este supus omul în cursul unei zile.

Cantităţile minime din diferitele principii nutritive pe care le consumă un om determină *necesarul biologic*.

Problema cere să se determine cantităţile care trebuie consumate din fiecare aliment de care dispunem astfel încît ţinînd seama de proporţiile în care se găsesc principiile nutritive în fiecare din ele, să se asigure *necesarul biologic* la un preţ de cost minim.

Aplicaţie. Pentru un organism normal sînt necesare cel puţin 3000 calorii şi 100 g proteine în unitate de timp (pe zi). Se cunosc următoarele date:

1000 g pîine conţin 2000 calorii şi 50 g proteine;

1000 g brînză conţin 4000 calorii şi 200 g proteine; costul unui kg de pîine este de 4 lei, iar a unui kg de brînză de 16 lei.

Se cere să se determine cantitatea de pîine şi cantitatea de brînză care trebuie consumată de om într-o zi pentru a asigura *necesarul biologic* (minimum 3000 calorii şi 100 g proteine) la un preţ de cost minim.

Soluţie. Dacă notăm cu x_1 şi x_2 cantităţile de pîine şi de brînză ce urmează a fi consumate, se obţine următorul program liniar:

$$C = 4x_1 + 16x_2 = \min.$$
$$2000x_1 + 4000x_2 \geqslant 3000$$
$$50x_1 + 200x_2 \geqslant 100$$
$$x_1 \geqslant 0; \; x_2 \geqslant 0$$

Scanned with OKEN Scanner

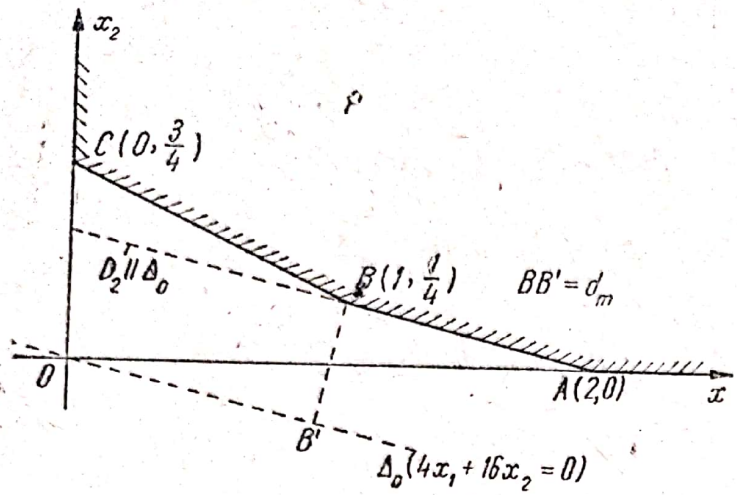


Fig. 145.

sau sub forma:

$$C = 4(x_1 + 4x_2) = \min.$$

$$2x_1 + 4x_2 \geqslant 3$$

$$x_1 + 4x_2 \geqslant 2$$

$$x_1 \geqslant 0\,;\ x_2 \geqslant 0.$$

Construind poligonul soluțiilor admisibile (fig. 145), se constată că este nemărginit.

Latura $|AB|$ situată pe dreapta $D_2(x_1 + 4x_2 = 2)$ fiind paralelă cu dreapta $\Delta_0(4x_1 + 16x_2 = 0)$, problema admite o infinitate de soluții de minim.

Rezultă că vom putea alege ca soluție minimă oricare din punctele situate pe latura $|AB|$. Soluția ce corespunde punctului B este:

$$x_1 = 1\,;\ x_2 = \frac{1}{4}$$

$$\min C = 4x_1 + 16x_2 = 4 \cdot 1 + 16\,\frac{1}{4} = 8.$$

Meniul va fi compus din: 1000 g pîine și 250 g brînză.

În aceste condiții, vom avea asigurat la limită necesarul biologic: 3000 calorii și 100 g proteine, iar costul meniului va fi minim și egal cu 8 lei.

Observații. Dacă vom alege ca soluție punctul $A(2, 0)$ ar trebui să consumăm 2 kg pîine și 0 kg brînză. Aceasta înseamnă că va trebui să mîncăm pîinea goală, ceea ce nu este recomandabil și nici plăcut din punct de vedere gastronomic, deși toate condițiile problemei sînt satisfăcute: necesarul biologic este chiar depășit (4000 calorii și 100 g proteine), iar costul are aceeași valoare minimă, 8 lei.

— Dacă punctul ales se deplasează pe dreapta AB, cantitatea de pîine se micșorează, iar cantitatea de brînză va crește.

În momentul în care punctul ales ca soluție este B, cantitatea de brînză este maximă (250 g), iar cantitatea de pîine minimă (1000 g).

— În practică, problemele care admit o infinitate de soluții optime prezintă un interes deosebit, deoarece avem posibilitatea să alegem soluția care convine mai bine din punct de vedere tehnic sau organizatoric și se adaptează mai bine situației locale existente în acel moment și din alte puncte de vedere ce nu au putut fi luate în considerare la întocmirea programului.

— Programul unei probleme de nutriție are același aspect matematic ca al problemei în care se cere rația furajeră.

— Cum în problemele practice $m < n$, iar numărul soluțiilor de bază este cel mult m, rezultă că numărul alimentelor ce vor intra în compunerea meniului va fi mai mic decît acela de care dispunem,

Scanned with OKEN Scanner

În astfel de cazuri se pot impune anumite condiții suplimentare asupra unor alimente; de a fi consumate cel puțin în anumite cantități date.

În acest mod numărul restricțiilor va crește și odată cu el și numărul soluțiilor admisibile de bază, adică al alimentelor ce vor intra în compunerea meniului.

4. *Repartizarea optimă a pieselor pe mașini unelte.* O întreprindere dispune de m grupe de mașini unelte $M_1, M_2, \ldots, M_m$, la care trebuie să se prelucreze piese de n tipuri diferite $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Timpul exprimat în minute, necesar prelucrării unei piese diferă după felul mașinii și tipul piesei.

Se cunosc următoarele date:

t_{ij} = timpul necesar prelucrării piesei P_j la mașina unealtă M_i;

c_i = capacitatea de prelucrare a mașinii unelte M_i, în timp de una lună (minute/lună);

b_j = beneficiul exprimat în lei/bucată obținut la piesa de tipul P_j;

x_j = numărul pieselor de tipul P_j ce urmează a fi prelucrate în perioada pentru care se întocmește planul (lunar).

Se cere să se determine numărul de piese din fiecare din cele n tipuri, ce urmează a fi prelucrate la cele m grupe de mașini pentru ca beneficiul total B ce se va obține în cursul acelei luni să fie maxim.

Datele problemei înscrise în tabela:

P_j / M_i	P_1	P_2	...	P_n	c_i
M_1	t_{11}	t_{12}	...	t_{1n}	c_1
M_2	t_{21}	t_{22}	...	t_{2n}	c_2
...	...	...	...	...	...
M_m	t_{m1}	t_{m2}	...	t_{mn}	c_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	—

ne conduc la următorul program liniar:

$$B = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n = \max.$$

$$t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \ldots + t_{1n}x_n \leqslant c_1$$

$$t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \ldots + t_{2n}x_n \leqslant c_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t_{m1}x_1 + t_{m2}x_2 + \ldots + t_{mn}x_n \leqslant c_m$$

$$x_j \geqslant 0;\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicație. Să presupunem că o întreprindere dispune de trei grupe de mașini M_1, M_2, M_3 la care trebuie să se prelucreze două tipuri de piese P_1 și P_2. Folosind datele din tabela:

M_i \ P_j	P_1	P_2	c_i
M_1	11	9	9 910
M_2	7	12	8 414
M_3	6	16	9 600
b_j	90	100	—

se cere să se determine un program care să conducă la un beneficiu maxim.

Soluție. Dacă notăm cu x_1 și x_2 numărul de piese din cele două tipuri se obține următorul program liniar:

$$B = 90x_1 + 100x_2 = \max.$$
$$11x_1 + 9x_2 \leqslant 9\,910$$
$$7x_1 + 12x_2 \leqslant 8\,414$$
$$6x_1 + 16x_2 \leqslant 9\,600$$
$$x_1 \geqslant 0;\quad x_2 \geqslant 0.$$

Construind poligonul soluțiilor admisibile (fig. 146), se constată că problema are 5 soluții admisibile de bază ce corespund vîrfurilor O, A_1, A_2, A_3, A_4. Vîrful A_2 este cel mai depărtat de dreapta Δ_0. Rezolvînd sistemul format din ecuațiile dreptelor:

$$11x_1 + 9x_2 = 9\,910 \qquad (D_1)$$
$$7x_1 + 12x_2 = 8\,414 \qquad (D_2)$$

se obține:

$$x_1 = 626;\quad x_2 = 336$$

$$\max B = 90 \cdot 626 + 100 \cdot 336 = 89\,940.$$

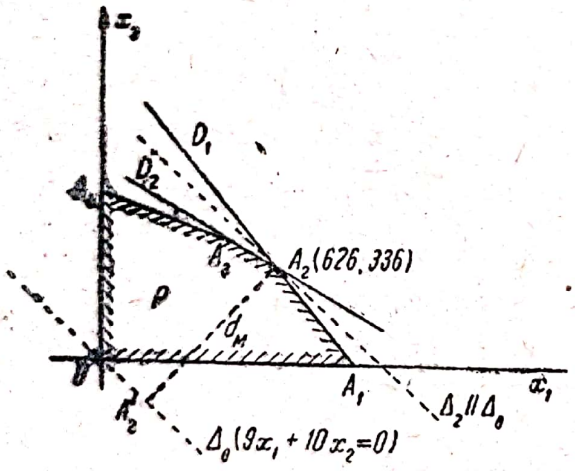


Fig. 146.

Concluzie. Dacă la acea întreprindere se vor planifica lunar cîte 626 piese de tipul P_1 și 336 piese de tipul P_2, beneficiul obținut va fi maxim și egal cu 89940 lei.

În aceste condiții:

— mașina M_1 va lucra 9910 minute (exact la capacitatea sa maximă);

— mașina M_2 va lucra 8414 minute (exact la capacitatea sa maximă);

— mașina M_3 va lucra $6 \cdot 626 + 16 \cdot 336 = 9\,132$ (sub capacitatea sa maximă cu 468 minute).

Observație. Datele problemei au fost astfel alese încît soluția optimă a fost exprimată în numere întregi. În general, în aplicațiile prac-

Scanned with OKEN Scanner

tice soluția optimă se obține în numere fracționare. Dacă soluția optimă prin natura ei nu are sens decît în numere întregi (reprezintă bucăți, număr de transporturi, un număr de piese etc.) evaluarea necunoscutelor se poate face cu aproximație prin rotunjire.

Pentru a se obține o soluție optimă în numere întregi R. Gomory introduce în literatura de specialitate algoritmi care permit rezolvarea programelor liniare în numere întregi [6].

5. *Repartizarea optimă a culturilor agricole.* Pentru a putea enunța problema repartiției optime a culturilor agricole vom folosi datele trecute în tabela:

A_i	q_i t/ha	c_i lei/ha	b_i lei/t	Q_i t	x_i ha
A_1	q_1	c_1	b_1	Q_1	x_1
A_2	q_2	c_2	b_2	Q_2	x_2
...	...	...	...	...	...
A_m	q_m	c_m	b_m	Q_m	x_m
Total	—	C	B	Q	S

în care:

A_i = diferitele produse agricole ce urmează a fi prevăzute în planul de culturi;

q_i = producția medie la hectar a produsului agricol A_i, calculată pe bază de date statice (tone/ha);

c_i = cheltuielile de producție care revin la ha pentru cultura A_i, în care sînt incluse cheltuielile directe, comune și generale (lei/ha);

b_i = beneficiul ce revine pe tona din produsul A_i și care se obține scăzînd din valoarea producției la preț de vînzare, totalul cheltuielilor ce compun prețul de cost;

Q_i = producția planificată pentru produsul A_i, exprimată în tone;

x_i = suprafața în ha, care urmează a fi cultivată cu cultura A_i;

C = totalul cheltuielilor alocate prin plan pentru perioada de timp respectivă (lei);

B = beneficiul total, rezultat din vînzarea tuturor produselor și al cărui maxim se caută;

Q = producția totală planificată, exprimată în tone;

S = suprafața arabilă totală care poate fi cultivată de o fermă agricolă (ha).

Problema cere să se determine suprafețele $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ce urmează a fi cultivate cu culturile $A_1, A_2, \ldots, A_m$ astfel încît:

— suprafața totală cultivată să fie egală cu S;

— producția obținută la fiecare din culturi să fie cel puțin egală cu cantitățile prevăzute în plan;

— totalul cheltuielilor de producție să nu depășească suma C alocată prin plan;

— beneficiul realizat din vînzarea tuturor produselor să fie maxim.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă vom ține seama de notațiile făcute și de enunțul problemei se obține programul liniar:

$$B = q_1 b_1 x_1 + q_2 b_2 x_2 + \ldots + q_m b_m x_m = \max.$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = S$$
$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m \leqslant C$$
$$q_i x_i \leqslant Q_i;\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Aplicație. O fermă agricolă dispune de 8000 ha teren arabil. Folosind datele din tabela:

Felul culturii	q_i t/ha	c_i lei/ha	b_i lei/t	Q_i t	x_i ha
Grîu	2,4	350	625	6000	x_1
Porumb	3,6	500	500	7200	x_2
Secară	2	300	400	4800	x_3
Total	—	$31 \cdot 10^5$	B	$18 \cdot 10^3$	8000

se cere să se determine suprafețele x_1, x_2, x_3 ce urmează a fi cultivate cu grîu, porumb și secară, astfel încît beneficiul total realizat de acea fermă să fie maxim.

Soluție. Datele problemei ne conduc la următorul program liniar:

$$B = 2{,}4 \cdot 625 x_1 + 3{,}6 \cdot 500 x_2 + 2 \cdot 400 x_3 = \max.$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 8\,000$$
$$350 x_1 + 500 x_2 + 300 x_3 \leqslant 3\,100\,000$$
$$2{,}4 x_1 \geqslant 6\,000$$
$$3{,}6 x_2 \geqslant 7\,200$$
$$2 x_3 \geqslant 4\,800.$$

Deoarece problema conține o restricție sub formă de egalitate, vom putea elimina una din necunoscute. Eliminarea lui x_3 ne conduce la un program liniar cu două necunoscute x_1 și x_2:

$$B = 700 x_1 + 1\,000 x_2 + 6\,400\,000 = \max.$$
$$x_1 \geqslant 2\,500$$
$$x_2 \geqslant 2\,000$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 5\,600$$
$$x_1 + 4 x_2 \leqslant 14\,000$$

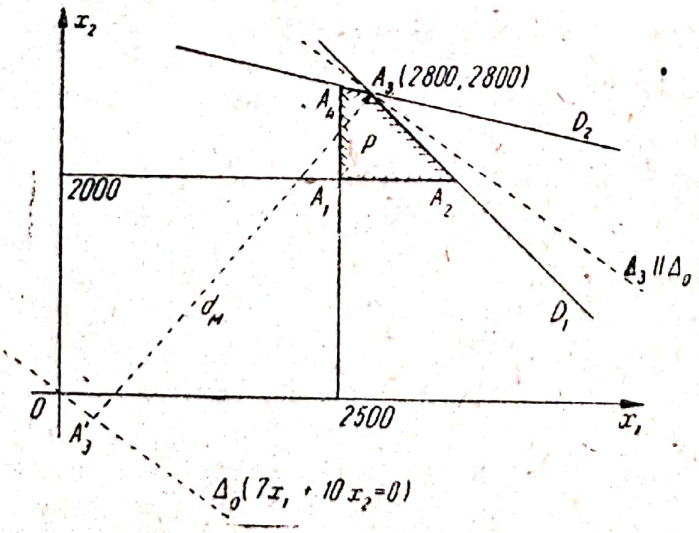


Fig. 147.

Construind poligonul P al soluțiilor admisibile (fig. 147) se constată că vîrful A_3 cel

mai depărtat de dreapta $\Delta_0(7x_1 + 10x_2 = 0)$, corespunde unui maxim al funcției obiectiv B.

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile dreptelor D_1 și D_2:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5\,600 && (D_1) \\ x_1 + 4x_2 &= 14\,000 && (D_2) \end{aligned}$$

și ținînd seama de restricția $x_1 + x_2 + x_3 = 8\,000$, se obține:

$$x_1 = 2\,800;\ x_2 = 2\,800;\ x_3 = 2\,400$$
$$\max B = 11\,160\,000.$$

Concluzie. Dacă ferma agricolă va cultiva 2 800 ha cu grîu, 2 800 ha cu porumb și 2 400 ha cu secară, ea va realiza un beneficiu maxim de 11 160 000 lei. În aceste condiții:

— producția la grîu va fi de $2{,}4 \cdot 2\,800 = 6\,720$ t (cu 720 t peste plan);

— producția la porumb va fi de $3{,}6 \cdot 2\,800 = 10\,080$ t (cu 2 800 t peste plan);

— producția la secară va fi de $2 \cdot 2\,400 = 4\,800$ t (conform planului).

Pentru ca beneficiul real să fie cel puțin egal cu cel rezultat din calcul, producția la hectar la cele trei culturi trebuie să fie egală (sau mai mare) cu valorile luate în considerare la întocmirea planului.

De aceea, în cazul unui studiu concret se recomandă ca producția medie la ha a diferitelor culturi să fie calculată cu multă atenție, luîndu-se în considerare valorile medii pe un număr cît mai mare de ani.

— Mărimile q_i care reprezintă producția medie la ha sînt variabile aleatoare[1] (întîmplătoare), ele pot lua o serie de valori cuprinse într-un interval dat (bine definit în cazul unui studiu concret).

În cazul în care legea de repartiție a variabilei aleatoare q_i este cunoscută[2], problema se poate rezolva prin metodele programării stochastice[3] [5] și [13].

6. *O problemă de repartizare a transporturilor.* Aprovizionarea orașului M cu un anumit produs de larg consum se face din trei centre: A_1, A_2, A_3. Cantitatea totală din acel produs solicitată de orașul M este de 120 vagoane. Cele 3 centre dispun de: 72, 36 respectiv 96 vagoane din produsul respectiv.

Gradul de mecanizare a lucrărilor de încărcare și descărcare a vagoanelor este diferit și, în consecință, timpul necesar pentru încărcarea și descărcarea vagoanelor diferă de la un centru la altul astfel: 7 ore, 4 ore, respectiv 8 ore/vagon.

Timpul total necesar lucrărilor de încărcare—descărcare a tuturor vagoanelor este limitat la cel mult 912 ore.

Costul transportului unui vagon din cele 3 centre în orașul M este de 3, 5, 1 unități bănești (se va considera o unitate bănească egală cu 100 lei).

Se cere să se determine numărul de vagoane care trebuie trimise din cele 3 centre A_1, A_2, A_3, astfel încît orașul M să primească întreaga

---

[1] „alea" în latină, joc de zaruri.

[2] adică se cunosc valorile q_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) pe care le poate lua variabila aleatoare, precum și probabilitățile p_{ij} de a se realiza aceste valori.

[3] στοχος în greacă, scop, stohastihiz era o persoană capabilă de a prevedea un eveniment.

cantitate de 120 vagoane de care are nevoie, iar costul total al acestor transporturi să fie minim.

Soluția 1. Dacă notăm cu x_1, x_2, x_3 numărul vagoanelor ce trebuie trimise din cele 3 centre, condițiile problemei ne conduc la următorul program liniar:

$$f = 3x_1 + 5x_2 + x_3 = \min. \tag{6}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 120 \tag{7}$$

$$7x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leqslant 912$$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 72$$

$$0 \leqslant x_2 \leqslant 36$$

$$0 \leqslant x_3 \leqslant 96.$$

Dacă eliminăm necunoscuta x_3 folosind ecuația (7), programul liniar devine:

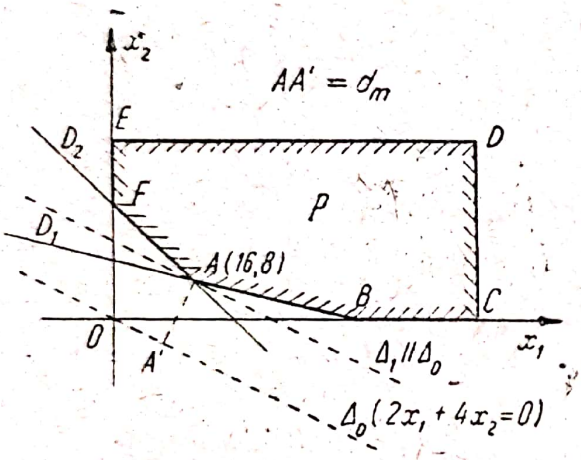


Fig. 148.

$$f = 2x_1 + 4x_2 + 120 = \min.$$

$$x_1 + 4x_2 \geqslant 48$$

$$x_1 + x_2 \geqslant 24$$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 72$$

$$0 \leqslant x_2 \leqslant 36.$$

Din figura 148 se constată că punctul A cel mai apropiat de dreapta Δ_0, minimizează funcția obiectiv f.

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile dreptelor D_1 și D_2 și folosind ecuația (7) se obține:

$$x_1 = 16;\ x_2 = 8;\ x_3 = 96$$

$$\min f = 2 \cdot 16 + 4 \cdot 8 + 120 = 184.$$

Concluzie. Centrele A_1, A_2, A_3 vor trimite 16, 8 respectiv 96 vagoane din produsul considerat. În acest mod orașul M va primi întreaga cantitate de care avea nevoie (120 vagoane), iar costul transportului va fi minim și egal cu 18 400 lei.

Soluția 2. Un alt mod de a rezolva un program liniar în cazul în care una din restricții este o ecuație este următorul:

Se face substituția:

$$x_1 = y_1;\ f = y_2, \tag{8}$$

și se determină x_2 și x_3 din (6) și (7) în funcție de y_1 și y_2:

$$x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{4}y_2 - 30$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + 150.$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul de restricţii devine:

$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 &\geqslant 168 \\ 0 \leqslant y_1 &\leqslant 72 \\ -2y_1 + y_2 &\leqslant 264 \\ -2y_1 + y_2 &\geqslant 120 \\ 2y_1 + y_2 &\leqslant 216 \\ 2y_1 + y_2 &\geqslant 600. \end{aligned}$$

Din figura 149 se constată că poligonul soluţiilor este hexagonul $ABCDEF$, definit de dreptele:

$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 &= 168 \quad (D_1) \\ y_1 &= 72 \quad (D_2) \\ -2y_1 + y_2 &= 264 \quad (D_3) \\ -2y_1 + y_2 &= 120 \quad (D_4) \\ 2y_1 + y_2 &= 216 \quad (D_5) \\ 2y_1 + y_2 &= 600 \quad (D_6) \end{aligned}$$

Dacă ţinem seama de substituţia $y_2 = f$, problema se reduce la determinarea unui punct ce aparţine poligonului P al soluţiilor, a cărui ordonată este minimă. Acesta este evident, punctul A cel mai apropiat de axa Oy_1. Se determină coordonatele punctului A, rezolvînd sistemul format din ecuaţiile dreptelor (D_1) şi (D_5):

$$y_1 = 16; \qquad y_2 = 184,$$

apoi, folosind substituţiile (8) se obţine acelaşi rezultat:

$$x_1 = 16;\ x_2 = 8;\ x_3 = 96;$$
$$\min f = 184.$$

Dacă poligonul soluţiilor ar fi avut una din laturi, de exemplu, $|A_iA_{i+1}|$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ paralelă cu axa Oy_1, problema ar fi admis o infinitate de soluţii; mulţimea punctelor situate pe latura $|A_iA_{i+1}|$. Toate aceste soluţii ar fi condus la acelaşi minim al funcţiei f, deoarece $\min f = \|MM'\| = y_2 =$ constant pentru toate punctele situate pe latura $|A_iA_{i+1}|$ (fig. 150).

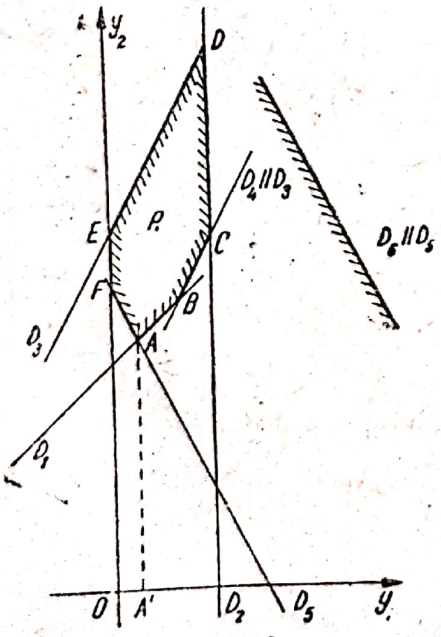


Fig. 149.

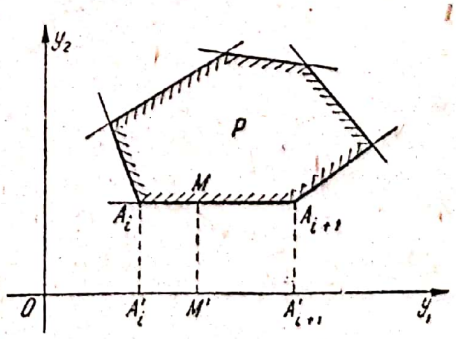


Fig. 150.

§ 4. Algoritmul simplex

Așa cum rezultă din interpretarea geometrică a programelor liniare, soluția optimă se află printre soluțiile admisibile de bază. Dar, numărul total al bazelor (soluțiilor de bază) pentru un program care conține m restricții cu n necunoscute C_n^m, crește considerabil odată cu m și n.

Deoarece nu se poate concepe calculul funcției scop pentru toate cele C_n^m soluții de bază (care în cazul unui studiu concret este de ordinul $10 \ldots 10^{12}$), în literatura de specialitate au fost elaborate metode mult mai simple.

Pentru a vedea modul în care se obține o soluție optimă a unui program liniar vom expune metoda elaborată de G. B. Dantzig, cunoscută sub numele de *algoritmul simplex*, care se desfășoară pe etape astfel:

— Se determină o soluție inițială de bază.

— Printr-un procedeu iterativ se înlocuiește baza inițială cu o altă bază. Această operație de schimbare a bazei (de trecere de la un vîrf la altul al poliedrului) este astfel organizată încît funcția scop să se reducă (în cazul de minim) sau să se majoreze (în cazul de maxim).

— După un număr oarecare de pași (iterații succesive) se obține o bază pentru care funcția scop nu se mai poate reduce (pentru cazul de minim), sau nu mai poate crește (în cazul de maxim). Această bază corespunde unei soluții optime.

Exemplu. Să se rezolve următorul program liniar canonic:

$$f = 4x_1 + 2x_2 = \max$$
$$x_1 - x_2 \leqslant 2$$
$$-x_1 + 2x_2 \leqslant 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 6$$
$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.$$

Soluție.

— *Se transformă într-un program standard.*

Introducînd variabilele ecart x_3, x_4, x_5 se obține următorul program liniar standard:

$$f = 4x_1 + 2x_2 = \max \tag{1}$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \tag{2}$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 6,$$
$$x_j \geqslant 0;\ j = 1, 2, \ldots, 5.$$

— *Se determină o soluție inițială de bază admisibilă.*

Se constată că, pentru $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$, se obține soluția:

$$\bar{x}_3 = 2;\ \bar{x}_4 = 4;\ \bar{x}_5 = 6,$$

care este o soluție de bază admisibilă.

Valoarea funcției scop ce corespunde bazei inițiale pe care o vom nota $B_0(x_3, x_4, x_5)$, este $f_0 = 4\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = 0$ și corespunde unui minim.

Scanned with OKEN Scanner

— *Se face o schimbare de bază.*

Deoarece coeficienții lui x_1 și x_2 sînt pozitivi, funcția scop va crește dacă vom considera o altă bază care să conțină pe x_1 sau x_2. Cum coeficientul lui x_1 este mai mare decît al lui x_2, vom introduce în bază pe x_1 în locul lui x_3. Noua bază va fi $B_1(x_1, x_4, x_5)$. Rezolvînd sistemul (2) în raport cu variabilele x_2 și x_3 din afara bazei se obține:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + x_2 - x_3 \\ x_4 &= 6 - x_2 - x_3 \\ x_5 &= 4 - 3x_2 + x_3; \end{aligned} \tag{3}$$

iar funcția scop devine:

$$f_1 = 8 + 6x_2 - 4x_3. \tag{4}$$

Pentru $x_2 = x_3 = 0$, se obține noua soluție de bază și valoarea corespunzătoare a funcției scop:

$$\bar{x}_1 = 2;\ \bar{x}_4 = 6;\ \bar{x}_5 = 4;\ f_1 = 8.$$

Schimbarea de bază efectuată, care constituie o iterație (un pas) a algoritmului simplex a condus la majorarea funcției scop (de la $f_0 = 0$, la $f_1 = 8$).

Observație. Dacă am fi introdus în bază pe x_1 în locul lui x_4, sau în locul lui x_5, noile baze: (x_3, x_1, x_5) respectiv (x_3, x_4, x_1), nu ar fi fost admisibile (ar fi conținut și valori $x_j < 0$).

Într-adevăr, rezolvînd sistemul (2) în raport cu (x_2, x_4), apoi în raport cu (x_2, x_5) se obțin următoarele soluții de bază neadmisibile:

— pentru baza (x_3, x_1, x_5): $\bar{x}_3 = 6;\ \bar{x}_1 = -4;\ \bar{x}_5 = 10;\ \bar{x}_2 = \bar{x}_4 = 0;$

— pentru baza (x_3, x_4, x_1): $\bar{x}_3 = -4;\ \bar{x}_4 = 10;\ \bar{x}_1 = 6;\ \bar{x}_2 = \bar{x}_5 = 0.$

Din (4) se constată că funcția scop se mai poate majora deoarece coeficientul lui x_2 este pozitiv.

Vom face deci o nouă schimbare de bază care să conțină pe x_3. Introducînd în bază pe x_2 în locul lui x_5, noua bază va fi $B_2(x_1, x_4, x_2)$. Repetînd procedeul folosit în prima iterație, se rezolvă sistemul (3) în funcție de variabilele x_3 și x_5 din afara bazei:

Se obține:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_4 &= \frac{14}{3} - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5, \end{aligned}$$

iar funcția scop devine:

$$f_2 = 16 - 2x_3 - 2x_5. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x_3 = x_5 = 0$, se obține soluția de bază și valoarea funcției scop:

$$\hat{x}_1 = \frac{10}{3}; \quad \hat{x}_2 = \frac{4}{3}; \quad \hat{x}_4 = \frac{14}{3}; \quad f_2 = 16.$$

Se constată că după iterația a doua, funcția scop s-a majorat de la $f_1 = 8$, la $f_2 = 16$.

Coeficienții lui x_3 și x_5 din f_2 fiind negativi, funcția scop nu mai poate crește.

Soluția obținută după pasul doi este deci maximă:

$$\hat{x}_1 = \frac{10}{3}; \quad \hat{x}_2 = \frac{4}{3}; \quad \max f = f_2 = 16.$$

Pentru a aplica algoritmul simplex este necesar să știm:

— cum se determină o soluție de bază;

— cum se face o schimbare a bazei;

— care este criteriul care ne permite să stabilim dacă funcția scop și-a atins valoarea sa optimă (criteriul de optimalitate).

a) *Cum se determină o soluție de bază.*

Vom considera programul liniar sub forma:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min. \tag{6}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{7}$$

$$x_j \geqslant 0; \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

în care $m < n$. Să presupunem că m din cele n variabile, de exemplu primele m formează o bază. Aceasta înseamnă că:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} = |a_{ij}|_{mm} \neq 0.$$

Sistemul (7) care se poate scrie:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{im}x_m = b_i - a_{i,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{in}x_n; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

se poate rezolva în raport cu variabilele $x_{m+1}, \ldots, x_n$ obținînd o soluție de forma:

$$x_j = \hat{x}_j - x_{j,m+1}x_{m+1} - \ldots - x_{jn}x_n; \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Dacă anulăm acum variabilele din afara bazei:

$$x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$$

și presupunem că $\hat{x}_j \geqslant 0$; $j = 1, 2, \ldots, m$, se obține soluția admisibilă de bază:

$$x_j = \hat{x}_j \geqslant 0; \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) *Cum se face o schimbare a bazei.*

Să presupunem că soluția de bază din (8), care se poate scrie:

$$
\begin{aligned}
& x_1 = \bar{x}_1 - x_{1,m+1}\, x_{m+1} - \ldots - x_{1k}\, x_k - \ldots - x_{1j}\, x_j - \ldots - x_{1n}\, x_n \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(9') \quad & x_r = \bar{x}_r - x_{r,m+1}\, x_{m+1} - \ldots - x_{rk}\, x_k - \ldots - x_{rj}\, x_j - \ldots - x_{rn}\, x_n \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (9) \\
(9'') \quad & x_i = \bar{x}_i - x_{i,m+1}\, x_{m+1} - \ldots - x_{ik}\, x_k - \ldots - x_{ij}\, x_j - \ldots - x_{in}\, x_n \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& x_m = \bar{x}_m - x_{m,m+1}\, x_{m+1} - \ldots - x_{mk}\, x_k - \ldots - x_{mj}\, x_j - \ldots - x_{mn}\, x_n
\end{aligned}
$$

nu este optimă. În acest caz va trebui să facem o schimbare de bază. Să presupunem că vrem să introducem variabila x_k în locul variabilei x_r. Noua bază va fi deci formată din variabilele:

$$x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots, x_m.$$

Pentru a obține noua soluție de bază va trebui să rezolvăm sistemul (9) în raport cu variabilele din afara bazei:

$$x_{m+1}, \ldots, x_r, \ldots, x_j, \ldots, x_n.$$

Variabila x_k se obține direct din (9'):

$$x_k = \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}} - \ldots - \frac{1}{x_{rk}}\, x_r - \ldots - \frac{x_{rj}}{x_{rk}}\, x_j - \ldots - \frac{x_{rn}}{x_{rk}}\, x_n. \qquad (10)$$

Dacă notăm cu accent termenii liberi și coeficienții variabilelor din noua bază, vom putea scrie:

$$x_k = \bar{x}'_k - \ldots - x'_{kr}\, x_r - \ldots - x'_{kj}\, x_j - \ldots - x'_{kn}\, x_n. \qquad (10')$$

Din comparația relațiilor (10) și (10') rezultă:

$$\boxed{\bar{x}'_k = \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}}} \qquad \boxed{x'_{rj} = \frac{x_{rj}}{x_{rk}}} \qquad (11)$$

Pentru celelalte variabile x_i; $i \neq k$; se elimină x_k între ecuațiile (9') și (9''), înmulțind în (9') cu $\frac{x_{ik}}{x_{rk}}$ și scăzînd din (9'').

Se obține:

$$x_i = \left(\bar{x}_i - \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}}\, x_{ik}\right) - \ldots - \left(x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}}\, x_{ik}\right) x_j - \ldots - \left(x_{in} - \frac{x_{rn}}{x_{rk}}\, x_{ik}\right) x_n \qquad (12)$$

$$x_i = \bar{x}'_i - \ldots - x'_{ij}\, x_j - \ldots - x'_{in}\, x_n. \qquad (12')$$

Comparînd relațiile (12) cu (12') obținem:

$$\boxed{\bar{x}'_i = \bar{x}_i - \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}}\, x_{ik}} \qquad \boxed{x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}}\, x_{ik}} \quad i \neq k. \qquad (13)$$

Scanned with OKEN Scanner

Coeficientul x_{rk} se numeşte pivotul schimbării de bază, în care x_k intră în noua bază în locul lui x_r.

Dacă notăm z_0 şi z_0' valorile funcţiei scop ce corespund celor două soluţii de bază $\bar{x}_i$ şi $\bar{x}_i'$:

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i \bar{x}_i ; \quad z_0' = \sum_{i=1}^{m} c_i \bar{x}_i' \tag{14}$$

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} ; \quad z_j' = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}'. \tag{15}$$

Folosind (13), din (14) şi (15) obţinem:

$$z_0' = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(\bar{x}_i - \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}} x_{ik} \right) = \sum_{i=1}^{m} c_i \bar{x}_i - \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}} \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ik} = z_0 - \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}} (z_k - c_k)$$

$$z_j' - c_j' = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} x_{ik} \right) - c_j = (z_j - c_j) - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} (z_k - c_k).$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_0' &= z_0 - \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}} (z_k - c_k) \\ z_j' - c_j' &= (z_j - c_j) - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} (z_k - c_k) \end{aligned}} \tag{16}$$

Formulele (13) şi (16) ne permit să facem o schimbare de bază, în care am presupus că x_k intră în noua bază în locul lui x_r.

Criteriul de intrare în bază.

— Cazul în care se cere minimul.

Dacă notăm $\theta_i = \dfrac{\bar{x}_i}{x_{ik}} > 0$; $z_0' = z_0 - \theta_i (z_j - c_j)$.

Valoarea iniţială z_0 a funcţiei scop se va *reduce* cu cantitatea maximă, atunci cînd diferenţa $z_j - c_j > 0$, va fi maximă.

Dacă:

$$\max (z_j - c_j) = z_k - c_k > 0 ; \; j = m + 1, \ldots, n ; \tag{17}$$

variabila x_k va intra în noua bază.

— Cazul în care se cere maximul.

Funcţia scop se va *majora* cu cantitatea maximă, atunci cînd diferenţa $z_j - c_j < 0$, va fi minimă.

Dacă:

$$\min (z_j - c_j) = z_k - c_k < 0 ; \; j = m + 1, \ldots, n \tag{18}$$

variabila x_k va intra în noua bază.

Concluzie.

— Dacă se cere minimul, va intra în bază variabila pentru care diferenţa $z_j - c_j$ are valoarea pozitivă maximă.

— Dacă se cere maximul, va intra în bază variabila pentru care diferenţa $z_j - c_j$ are valoarea negativă minimă.

Relaţiile (17) şi (18) reprezintă criteriul de intrare în bază.

Scanned with OKEN Scanner

Criteriul de ieşire din bază.

Noua bază va fi admisibilă dacă vom avea satisfăcute condiţiile de nenegativitate:

$$\bar{x}_i' = \bar{x}_i - \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}} x_{ik} \geqslant 0$$

sau

$$0 \leqslant \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}} \leqslant \frac{\bar{x}_i}{x_{ik}}.$$

Dacă:

$$\min \frac{\bar{x}_i}{x_{ik}} = \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}}; \; i = 1, 2, \ldots, m \tag{19}$$

variabila x_r va ieşi din bază.

Concluzie.

— Se cercetează rapoartele $\theta_i > 0$; $i=1, 2, \ldots, m$. Variabila ce corespunde raportului θ_i minim, va ieşi din bază.

— Dacă toţi $x_{ik} < 0$, variabila x_k nu poate intra în bază.

— Dacă avem mai multe rapoarte θ_i minime egale, se alege unul din ele.

c) *Criteriul de optimalitate.*

— *Cazul în care se cere minimul.*

După fiecare schimbare de bază putem avea următoarele situaţii:

1) $z_j - c_j \leqslant 0$, egalitatea avînd loc numai pentru variabilele din bază. Soluţia este minimă şi unică.

2) $z_j - c_j \leqslant 0$, egalitatea avînd loc şi pentru unele variabile din afara bazei. Programul admite o infinitate de soluţii, care conduc la aceeaşi valoare minimă a funcţiei scop.

Aceste soluţii se pot obţine dacă vom introduce în bază succesiv, cîte una din variabilele din afara bazei pentru care $z_j - c_j = 0$.

3) $z_j - c_j > 0$, pentru anumiţi j, dar $x_{ij} < 0$ pentru toţi $i=1, 2, \ldots, m$. Funcţia scop poate descreşte oricît neavînd un minim finit, deoarece $\bar{x}_i' = \bar{x}_i - \theta_i x_{ik} > 0$, pentru orice $\theta_i > 0$, $\min z = -\infty$.

4) $z_j - c_j > 0$, pentru anumiţi j, dar avem şi $x_{ij} > 0$ pentru unele valori ale lui $i = 1, 2, \ldots, m$. Funcţia nu este minimă, ea poate fi micşorată efectuînd o schimbare de bază.

— *Cazul în care se cere maximul.*

1) $z_j - c_j \geqslant 0$, egalitatea avînd loc numai pentru variabilele din bază. Soluţia este maximă şi unică.

2) $z_j - c_j \geqslant 0$, egalitatea avînd loc şi pentru unele variabile din afara bazei. Programul admite o infinitate de soluţii, care conduc la aceeaşi valoare maximă a funcţiei scop.

3) $z_j - c_j < 0$, pentru anumiţi j, dar $x_{ij} < 0$, pentru toţi $i = 1, 2, \ldots, m$. Funcţia scop poate creşte oricît neavînd un maxim finit, deoarece $\bar{x}_i' = \bar{x}_i - \theta_i x_{ik} > 0$, pentru orice $\theta_i > 0$, $\max z = +\infty$.

4) $z_j - c_j > 0$, pentru anumiţi j, dar avem şi $x_{ij} > 0$, pentru unele valori ale lui i. Funcţia scop nu este maximă, ea mai poate fi majorată efectuînd o schimbare de bază.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a aplica algoritmul simplex se foloseşte un tabel de forma

Tabela 1

B	c_j	$\bar{x}_j$	$c_1 \ldots c_r \ldots c_i \ldots c_m \ldots c_k \quad \ldots c_j \quad \ldots c_n$	
			$x_1 \ldots x_r \ldots x_i \ldots x_m \ldots x_k \quad \ldots x_j \quad \ldots x_n$	
x_1	c_1	$\bar{x}_1$	$1 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots x_{1k} \quad \ldots x_{1j} \quad \ldots x_{1n}$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \ldots \quad \ldots$	
x_r	c_r	$\bar{x}_r$	$0 \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \ldots x_{rk} \quad \ldots x_{rj} \quad \ldots x_{rn}$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \ldots \quad \ldots$	
x_i	c_i	$\bar{x}_i$	$0 \ldots 0 \ldots 1 \ldots 0 \ldots x_{ik} \quad \ldots x_{ij} \quad \ldots x_{in}$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \ldots \quad \ldots$	
x_m	c_m	$\bar{x}_m$	$0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 1 \ldots x_{mk} \quad \ldots x_{mj} \quad \ldots x_{mn}$	
		z_0	$0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots z_k - c_k \quad \ldots z_j - c_j \quad \ldots z_n - c_n$	

numit tabel simplex, care se completează astfel:

— în coloana B (baza) se trec variabilele din bază;

— în coloana c_j coeficienţii din funcţia scop ce corespund variabilelor din bază;

— în coloana $\bar{x}_j$, soluţia de bază, adică valorile variabilelor ce compun baza:

$$x_j = \bar{x}_j \geqslant 0; j = 1, 2, \ldots, m$$

care se presupune cunoscută;

— în coloanele următoare, coeficienţii tuturor variabilelor din soluţia de bază:

$$x_i = \bar{x}_i - x_{i, m+1} x_{m+1} - \ldots - x_{in} x_n; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

luaţi cu semnul schimbat *;

— în prima linie, toţi coeficienţii din funcţia scop;

— în ultima linie, coloana $\bar{x}_j$, valoarea funcţiei scop ce corespunde soluţiei de bază:

$$z_0 = c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + \ldots + c_m \bar{x}_m;$$

— în celelalte coloane din ultima linie se trec diferenţele:

$$z_j - c_j; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

în care:

$$z_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + \ldots + c_m x_{mj}; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Cum $z_j = c_j$ pentru $j = 1\ 2, \ldots, m$, rezultă că pentru variabilele din bază avem:

$$z_j - c_j = 0; \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Folosind criteriul de optimalitate se constată dacă soluţia iniţială de bază obţinută în tabela 1 este optimă. În cazul în care nu este optimă se face o schimbare de bază. Folosind criteriul de intrare în bază (18) şi de

* dacă anulăm variabilele din afara bazei: $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$, se obţine soluţia de bază $x_i = \bar{x}_i$; $i = 1, 2, \ldots, m$.

Scanned with OKEN Scanner

ieşire din bază (19), se stabileşte care este variabila care intră şi care iese din bază.

Dacă vom presupune că variabila x_k intră în bază în locul lui x_r, noua bază va conţine variabilele $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$.

Noua tabelă simplex devine:

Tabela 2

B'	c_j	$\tilde{x}_j$	$c_1 \ldots c_r \ldots c_i \ldots c_m \ldots c_k \ldots c_j \ldots c_n$ $x_1 \ldots x_r \ldots x_i \ldots x_m \ldots x_k \ldots x_j \ldots x_n$
x_1	c_1	$\tilde{x}'_1$	$1 \ldots x'_{1r} \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots x'_{1j} \ldots x'_{1n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$
x_k	c_k	$\tilde{x}'_k$	$0 \ldots x'_{kr} \ldots 0 \ldots 0 \ldots 1 \ldots x'_{kj} \ldots x'_{kn}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$
x_i	c_i	$\tilde{x}'_i$	$0 \ldots x'_{ir} \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \ldots x'_{ij} \ldots x'_{in}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$
x_m	c_m	$\tilde{x}'_m$	$0 \ldots x'_{mr} \ldots 0 \ldots 1 \ldots 0 \ldots x'_{mj} \ldots x'_{mn}$
		z'_0	$0 \ldots z'_r - c'_r \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots z'_j - c'_j \ldots z'_n - c'_n$

Elementele din tabela 2 se obţin din formulele (11), (13), (16).

Observaţii: Elementele ce corespund liniei pivotului se obţin împărţind toate elementele la pivot:

$$\tilde{x}'_k = \frac{\tilde{x}_r}{x_{rk}}\,;\quad x'_{kj} = \frac{x_{rj}}{x_{rk}}\,;\quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

— Toate celelalte elemente din tabela 2 (inclusiv acelea situate pe ultima linie) se pot deduce uşor din tabela 1, folosind *regula dreptunghiului*[1]. Astfel, elementul x'_{ij} se obţine din relaţia[2]:

$$x'_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} x_{rk} & x_{rj} \\ x_{ik} & x_{ij} \end{vmatrix}}{x_{rk}} = \frac{x_{rk}\,x_{ij} - x_{ik}\,x_{rj}}{x_{rk}} \tag{21}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m\,;\ j = 1, 2, \ldots, n\,;\ i \neq k.$$

Elementele situate pe ultima linie, sînt date de relaţiile[3]:

$$z'_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_{rk} & \tilde{x}_r \\ z_k - c_k & z_0 \end{vmatrix}}{x_{rk}}\,;\quad z'_j - c'_j = \frac{\begin{vmatrix} x_{rk} & x_{rj} \\ z_k - c_k & z_j - c_j \end{vmatrix}}{x_{rk}}\,;\quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{22}$$

Expresiile de la numărător se calculează ca un determinant de ordinul doi, împărţind apoi rezultatul la pivot.

— Trecerea de la o bază la alta constituie o iteraţie. După fiecare iteraţie funcţia scop prezintă o reducere (în cazul de minim), sau o majorare (în cazul de maxim) faţă de valoarea ei obţinută în iteraţia precedentă.

---

[1] cunoscută şi sub numele de metoda în cruce a lui Routh.

[2] identică cu (13).

[3] identice cu relaţiile (16).

Scanned with OKEN Scanner

— Iteraţiile se continuă pînă cînd, în baza criteriului de optimalitate stabilit, funcţia scop şi-a atins valoarea sa optimă (minimă, respectiv maximă).

— Dacă restricţiile unui program liniar canonic sînt de forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i$$
$$b_i \geqslant 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

se poate obţine uşor o soluţie iniţială de bază, scriind restricţiile sub formă de egalităţi:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + x_i^e = b_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

unde $x_i^e \geqslant 0$ sînt variabile ecart.

Pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, se obţine soluţia iniţială de bază:

$$x_i^e = b_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Exemplu. Vom relua programul liniar canonic:

$$z = 4x_1 + 2x_2 = \max.$$
$$x_1 - x_2 \leqslant 2$$
$$-x_1 + 2x_2 \leqslant 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 6$$
$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Soluţie. Introducînd variabilele ecart x_3, x_4, x_5 se obţine programul standard:

$$z = 4x_1 + 2x_2 = \max$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 6$$
$$x_j \geqslant 0; \; j = 1, 2, \ldots, 5$$

care admite soluţia iniţială de bază:

$$\bar{x}_3 = 2; \; \bar{x}_4 = 4; \; \bar{x}_5 = 6; \; \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0.$$

Se întocmeşte tabela simplex corespunzătoare acestei soluţii:

	B_0	c_j	$\bar{x}_j$	4	2	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x_3	0	2	**1**	−1	1	0	0
←	x_4	0	4	−1	2	0	1	0
	x_5	0	6	1	2	0	0	1
			0	−4	−2	0	0	0

↓

Deoarece se cere maximul funcţiei scop, şi avem diferenţe $z_j - c_j < 0$, programul nu este optim. Funcţia scop se mai poate majora efectuînd o schimbare de bază.

Scanned with OKEN Scanner

Cum :

$$\min\ (z_j - c_j) = z_1 - c_1 = -4 < 0;$$

variabila x_1 va intra în noua bază. Cercetînd apoi rapoartele :

$$\theta_i = \frac{\bar{x}_i}{x_{ik}} > 0;\quad i = 3,5$$

se constată că :

$$\min\ \theta_i = \min\left\{\frac{2}{1}, \frac{6}{1}\right\} = \frac{2}{1};\ i = 3,5$$

şi corespunde variabilei x_3. Deci x_1 va intra în bază în locul lui x_3. Noua bază va fi $B_1(x_1, x_4, x_5)$. Pivotul schimbării de bază care se află la intersecţia liniei x_3 cu coloana x_1 este egal cu 1.

Se întocmeşte tabela simplex pentru baza B_1, folosind formulele* (20), (21), (22).

	B_1	c_j	$\bar{x}_j$	4	2	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x_1	4	2	1	−1	1	0	0
	x_4	0	6	0	1	1	1	0
←	x_5	0	4	0	**3**	−1	0	1
			8	0	**−6**	4	0	0

Deoarece avem $z_2 - c_2 = -6 < 0$, soluţia obţinută în prima iteraţie nu este optimă. Variabila x_2 (ce corespunde diferenţei $z_2 - c_2$), va intra în noua bază.

Se constată apoi că :

$$\min\ \theta_i = \min\left\{\frac{6}{1}, \frac{4}{3}\right\} = \frac{4}{3};\ i = 4,5$$

şi deci variabila x_2 va intra în bază în locul lui x_5. Noua bază va fi $B_2(x_1, x_4, x_2)$. Se întocmeşte tabela simplex pentru baza B_2.

B_2	c_j	$\bar{x}_j$	4	2	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	4	10/3	1	0	2/3	0	1/3
x_4	0	14/3	0	0	4/3	1	−1/3
x_2	2	4/3	0	1	−1/3	0	1/3
		16	0	0	2	0	2

Se constată că :

$z_j - c_j > 0$, pentru variabilele din afara bazei (x_3, x_5) ;

$z_j - c_j = 0$, numai pentru variabilele din bază (x_1, x_2, x_4).

---

* coeficienţii variabilelor x_1, x_4, x_5, în noua bază nu se mai calculează deoarece sînt egali cu coeficienţii lui x_3, x_4, x_5, din vechea bază.

Scanned with OKEN Scanner

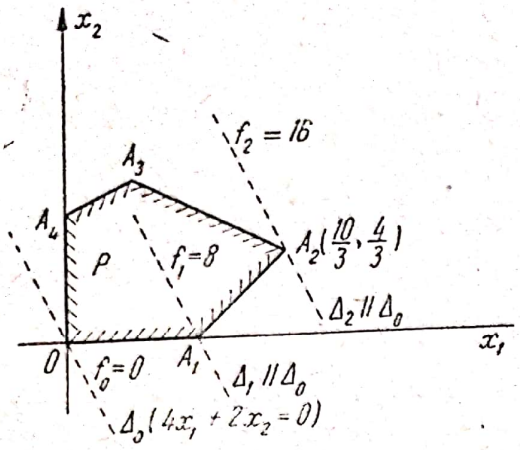


Fig. 151.

În baza criteriului de optimalitate, soluția programului canonic este maximă și unică.

$$\bar{x}_1 = \frac{10}{3}\ ;\ \bar{x}_2 = \frac{4}{3}\ ;\ \max z = 16.$$

— Soluția optimă a fost obținută numai după doi pași*.

— Coeficienții variabilelor x_1, x_4, x_2 din baza B_2 nu au fost calculați, ei fiind egali cu coeficienții variabilelor x_1, x_4, x_5 din baza precedentă.

În general, la o schimbare a bazei, coeficienții variabilelor din noua bază nu se mai calculează, ei fiind egali cu coeficienții corespunzători variabilelor din baza precedentă. În fiecare iterație se vor calcula numai coeficienții celor $n - m$ variabile din afara bazei.

Algoritmul simplex ne permite să determinăm numai acele soluții admisibile de bază care conduc la creșterea (reducerea) cu cantitatea maximă posibilă a funcției scop din mulțimea de creșteri (reduceri) posibile.

În exemplul dat, se constată ușor că pornind din origine unde $f_0 = 0$, s-a trecut în vîrful A_1 în care $f_1 = 8$ (și nu în A_4 unde $f_4 = 4$), apoi în vîrful A_2 unde funcția scop are valoarea maximă $f_2 = 16$ (și nu în A_3 în care $f_3 = 9$). Așadar algoritmul simplex constituie o metodă selectivă, care ne permite să ajungem la soluția optimă după un număr minim de iterații (schimbări de bază).

Din aplicarea acestui algoritm la un număr mare de exemple, rezultă că, numărul p al iterațiilor care conduc la soluția optimă, cînd nu se cunoaște o soluție inițială de bază, satisface relația:

$$\frac{3m}{2} \leqslant p \leqslant 2m.$$

Determinarea unei soluții inițiale de bază.

a. Cazul în care programul conține restricții de forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \leqslant b_i\ :\ b_i \geqslant 0\ ;\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Se transformă inecuațiile în ecuații:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_i^s = b_i\ ;\ i = 1, 2, \ldots, m$$

din care se deduce soluția inițială de bază:

$$x_i^s = b_i\ ;\ x_j = 0\ ;\ i = 1, 2, \ldots, m\ ;\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

* identică cu soluția geometrică din figura 151.

Scanned with OKEN Scanner

b. Cazul în care programul conține restricții de forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i;\ b_i \geqslant 0;\quad i = 1,2\ \ldots,\ m. \tag{23}$$

Se transformă sistemul (23) în ecuații:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j - x_i^e = b_i;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \tag{24}$$

$$x_i^e \geqslant 0;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Se consideră apoi programul artificial:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} x_i^a \to \min \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_i^e + x_i^a = b_i;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \tag{26}$$

$$x_j \geqslant 0;\ x^e \geqslant 0;\ x^a \geqslant 0;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{27}$$

în care variabilele ecart x_i^e, transformă inecuațiile în ecuații, iar x_i^a sînt variabile artificiale.

Introducerea lor în sistemul de restricții ne permite să determinăm soluția de bază a programului (25):

$$x_i^a = b_i;\ x_i^e = 0;\ x_j = 0;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Pentru a obține o soluție de bază a programului dat (24) se cunosc două metode: *metoda penalizării* datorată lui A. Charnes [2] și *metoda celor două faze* pe care o vom expune în cele ce urmează.

În prima fază se rezolvă programul liniar:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} x_i^a \to \min.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j - x_i^e + x_i^a = b_i;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \tag{28}$$

$$x_j \geqslant 0;\ x_i^e \geqslant 0;\ x_i^a \geqslant 0;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

care admite soluția inițială de bază:

$$x_i^a = b_i;\ x_i^e = 0;\ x_j = 0;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Putem avea următoarele situații:

1. $\min \varphi = 0$, iar toate variabilele artificiale au fost eliminate din bază. În acest caz soluția optimă a programului (28) constituie o soluție inițială de bază a programului (24).

Se trece la faza a doua rezolvînd programul (24), folosind baza inițială obținută în prima fază.

2. $\min \varphi = 0$, dar există variabile artificiale (cu valoarea zero) care nu pot fi eliminate din bază deoarece toți $x_{ij} = 0$.

Se trece la faza a doua, neglijînd liniile care conțin variabile artificiale. Iterațiile se continuă, minimizînd funcția scop a problemei date (24).

3. $\min \varphi > 0$. Problema dată nu admite soluții. Restricțiile programului dat sînt contradictorii.

Scanned with OKEN Scanner

c. Cazul în care programul conține restricții de forma :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i;\ b_i \geqslant 0;\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Se consideră programul artificial :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} x_i^a \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_i^a = b_i;\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant 0;\ x_i^a \geqslant 0;\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Se continuă ca și în cazul *b*, folosind metoda celor două faze.

Exemplul 1. Să se rezolve programul liniar :

$$\begin{aligned} \min\ & (2x_1 + x_2) \\ & 3x_1 + x_2 \geqslant 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geqslant 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geqslant 2 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Soluție. Aducem problema la forma standard introducînd variabilele ecart x_3^e, x_2^e, x_1^e :

$$\begin{aligned} \min\ & (2x_1 + x_2) \\ & 3x_1 + x_2 - x_1^e = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_2^e = 6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3^e = 2 \\ & x_1,\ x_2 \geqslant 0;\ x_1^e,\ x_2^e,\ x_3^e \geqslant 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Deoarece nu cunoaștem o soluție inițială de bază, introducem variabilele artificiale x_1^a, x_2^a, x_3^a și obținem programul :

$$\begin{aligned} f = (2x_1 + x_2) + (x_1^a + x_2^a + x_3^a) \to \min \\ 3x_1 + x_2 - x_1^e + x_1^a = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_2^e + x_2^a = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_3^a = 2 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0;\ x_i^e \geqslant 0;\ x_i^a \geqslant 0;\ i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{31}$$

Rezolvăm problema (31) folosind metoda celor două faze.

Scanned with OKEN Scanner

În prima fază rezolvăm programul:

$$\varphi_1^* = x_1^a + x_2^a + x_3^a \to \min \tag{32}$$

în condițiile (31), care admite soluția inițială de bază:

$$x_1^a = 3;\ x_2^a = 6;\ x_3^a = 2;\ x_1 = x_2 = 0;\ x_1^e = x_2^e = x_3^e = 0.$$

Întocmim tabela simplex pentru prima fază.

Faza 1

B	c_j	$\tilde{x}_j$	0	0	0	0	0	1	1	1	θ_i
			x_1	x_2	x_1^e	x_2^e	x_3^e	x_1^a	x_2^a	x_3^a	
x_1^a	1	3	**3**	1	−1	0	0	1	0	0	3/3
x_2^a	1	6	4	3	0	−1	0	0	1	0	6/4
x_3^a	1	2	1	2	0	0	−1	0	0	1	2/1
		11	**8**	6	−1	−1	−1	0	0	0	
x_1	0	1	1	1/3	−1/3	0	0		0	0	3
x_2^a	1	2	0	5/3	4/3	−1	0		1	0	6/5
x_3^a	1	1	0	**5/3**	1/3	0	−1		0	1	**3/5**
		3	0	**10/3**	5/3	−1	−1		0	0	
x_1	0	4/5	1	0	−2/5	0	1/5		0		4
x_2^a	1	1	0	0	1	−1	**1**		1		**1**
x_2	0	3/5	0	1	1/5	0	−3/5		0		—
		1	0	0	1	−1	**1**		0		
x_1	0	3/5	1	0	−3/5	1/5	0				
x_3^e	0	1	0	0	1	−1	1				
x_2	0	6/5	0	1	1	4/5	0				
		0	0	0	0	0	0				

În fiecare iterație, diferențele $\varphi_j - c_j$ maxime, rapoartele θ_i minime și pivotul corespunzător schimbării de bază, au fost marcate prin cifre groase.

După 3 iterații, prima fază se termină cu $\min \varphi = 0$.

În faza 2, întocmim tabela simplex pentru problema (30), pornind de la baza inițială: $x_1 = 3/5$; $x_3^e = 1$; $x_2 = 6/5$, folosind elementele obținute în ultima iterație din prima fază.

Faza 2

B	c_j	$\tilde{x}_j$	2	1	0	0	0	θ_i
			x_1	x_2	x_1^e	x_2^e	x_3^e	
x_1	2	3/5	1	0	−3/5	1/5	0	
x_3^e	0	1	0	0	1	−1	1	
x_2	1	6/5	0	1	4/5	−3/5	0	
		12/5	0	0	−2/5	−1/5	0	

Scanned with OKEN Scanner

Se constată că toți $z_j - c_j \leqslant 0$. Soluția obținută în faza 1 este optimă și pentru problema (30):

$$\hat{x}_1 = 3/5\,;\ \hat{x}_2 = 6/5\,;\ \hat{x}_1^e = \hat{x}_2^e = 0\,;\ \hat{x}_3^e = 1\,;$$

$$\min z = 2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = 12/5.$$

Observații: În iterația a doua avem pe ultima linie două diferențe maxime egale cu 1, ce corespund variabilelor x_1^e și x_3^e. În iterația a treia se putea introduce oricare din aceste două variabile.

Alegerea trebuie făcută astfel, încît funcția scop a problemei (31), $f = (2x_1 + x_2) + (x_1^e + x_2^e + x_3^e)$ să se micșoreze cît mai mult. Alegerea lui x_1^e micșorează pe f cu:

$$2\left(-\frac{2}{5}\right) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

Dacă alegem pe x_3^e, f se va micșora cu:

$$2 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot 1 + 1\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

Desigur, că x_3^e a fost introdus în bază.

Dacă am fi introdus în bază pe x_1^e soluția obținută la sfîrșitul primei faze nu ar fi fost optimă și pentru problema (30).

În faza a doua ar mai fi fost necesară încă o iterație pentru a obține $\min f$.

— Interpretarea geometrică din figura 152 confirmă rezultatele obținute prin metoda simplex.

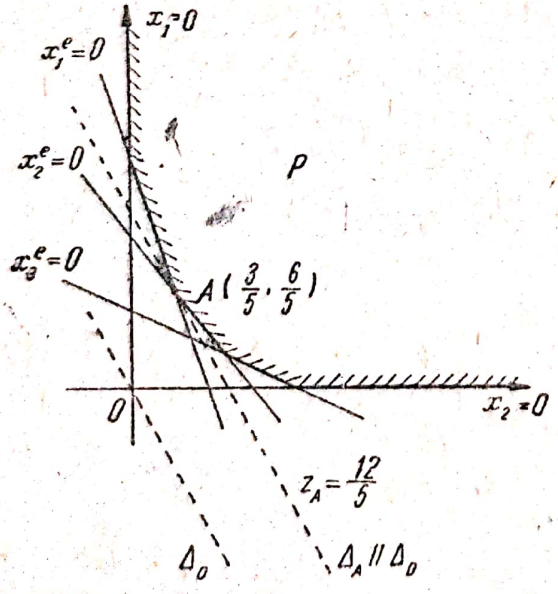


Fig. 152.

Exemplul 2. Să se rezolve programul liniar canonic:

$$\begin{aligned} &\min\ (-x_1 + x_2) \\ &x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \\ &x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ &2x_1 - x_2 \geqslant 2 \\ &x_1 \geqslant 0\,;\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Soluție. Scriem programul dat sub forma standard:

$$\begin{aligned} &\min\ (-x_1 + x_2) \\ &x_1 - 2x_2 + x_1^e = 2 \\ &x_1 + x_2 + x_2^e = 5 \\ &2x_1 - x_2 - x_3^e = 2 \\ &x_1, x_2 \geqslant 0\,;\ x_i^e \geqslant 0\,;\ i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{34}$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducem în ecuația a treia variabila artificială x_1^a și programul devine:

$$f = (-x_1 + x_2) + x_1^a \to \min$$
$$x_1 - 2x_2 + x_1^e = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_2^e = 5 \qquad (35)$$
$$2x_1 - x_2 - x_3^e + x_1^a = 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0;\ x_1^a \geq 0;\ x_i^e \geq 0;\ i = 1, 2, 3.$$

Folosim metoda celor două faze. În faza I se rezolvă programul:

$$\varphi = x_1^a \Rightarrow \min$$

în condițiile (35), cunoscînd soluția inițială de bază:

$$x_1^e = 2;\ x_2^e = 5;\ x_1^a = 2;\ x_1 = x_2 = x_3^a = 0.$$

Faza 1

B	c_j	$\tilde{x}_j$	0	0	0	0	0	1	θ_i
			x_1	x_2	x_1^e	x_2^e	x_3^e	x_1^a	
x_1^e	0	2	1	−2	1	0	0	0	2
x_2^e	0	5	1	1	0	1	0	0	5
x_1^a	1	2	**2**	−1	0	0	−1	1	1
		2	**2**	−1	0	0	−1	0	
x_1^e	0	1	0	−3/2	1	0	1/2		
x_2^e	0	4	0	3/2	0	1	1/2		
x_1	0	1	1	−1/2	0	0	−1/2		
		0	0	0	0	0	0		

În faza 2 se rezolvă programul (34), care admite soluția inițială de bază: $x_1^e = 1;\ x_2^e = 4;\ x_1 = 1;\ x_2 = x_3^e = 0.$

Faza 2

B	c_j	$\tilde{x}_j$	−1	1	0	0	0	θ_i
			x_1	x_2	x_1^e	x_2	x_3^e	
x_1	0	1	0	−3/2	1	0	**1/2**	**2**
x_2^e	0	4	0	3/2	0	1	1/2	8
x_1	−1	1	1	−1/2	0	0	−1/2	—
		−1	0	−1/2	0	0	**1/2**	
x_3^e	0	2	0	−3	2	0	1	—
x_2^e	0	3	0	**3**	−1	1	0	**1**
x_1	−1	2	1	−2	1	0	0	—
		−2	0	**1**	−1	0	0	
x_3^e	0	5	0	0	1	1	1	
x_2	1	1	0	1	−1/3	1/3	0	
x_1	−1	4	1	0	1/3	2/3	0	
		−3	0	0	−2/3	−1/3	0	

Scanned with OKEN Scanner

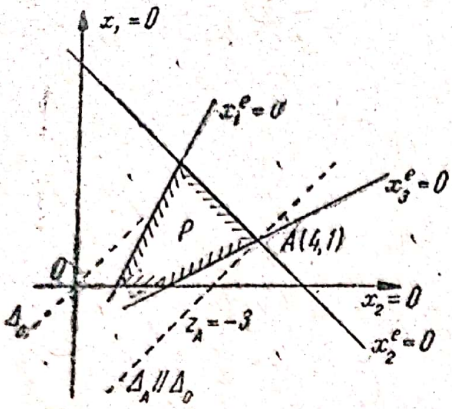


Fig. 153.

Observaţii: — Variabila artificială a fost eliminată din bază în prima fază după o singură iteraţie, fără ca soluţia obţinută să fie optimă şi pentru programul (34). Au mai fost necesare încă două iteraţii în faza 2, pentru a găsi soluţia optimă:

$$\hat{x}_1 = 4; \quad \hat{x}_2 = 1;$$

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2^e = 0;$$

$$\hat{x}_3^e = 5;$$

$$\min z = -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = -3.$$

— Soluţia geometrică a programului liniar canonic (33) este dată în figura 153.

Exemplul 3. *Cazul de incompatibilitate.*

$$\begin{aligned} &\min \ (-x_1 + x_2) \\ &-2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ &-x_1 + 2x_2 \geqslant 8 \\ &x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ &x_1, \quad x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Soluţie. Scriem programul dat sub forma standard, introducînd o singură variabilă artificială x_1^a în ecuaţia a doua:

$$\begin{aligned} &\min f = (-x_1 + x_2) + x_1^a \\ &-2x_1 + x_2 + x_1^e = 2 \\ &-x_1 + 2x_2 - x_2^e + x_1^a = 8 \\ &x_1 + x_2 + x_3^e = 5 \end{aligned} \tag{37}$$

$$x_1, \ x_2 \geqslant 0; \ x_1^a \geqslant 0; \ x_i^e \geqslant 0; \ i = 1, 2, 3.$$

Vom folosi metoda celor două faze. În faza 1, rezolvăm programul:

$$\varphi = x_1^a \to \min$$

în condiţiile (37), cunoscînd soluţia iniţială de bază:

$$x_1^e = 2; \quad x_1^a = 8; \quad x_3^e = 5; \quad x_1 = x_2 = x_3^e = 0.$$

Din ultima iteraţie a fazei 1, se constată că toţi $\varphi_j - c_j < 0$ pentru variabilele din afara bazei şi totuşi variabila artificială nu a fost eliminată din bază. $\min \varphi = 1 > 0$.

Programul (37) nu admite soluţii. Sistemul de restricţii (36) scris sub forma:

$$\begin{aligned} &-2x_1 + x_2 + x_1^e = 2 \\ &x_1 - 2x_2 + x_2^e = -8 \\ &x_1 + x_2 + x_3^e = 5 \end{aligned} \tag{38}$$

Scanned with OKEN Scanner

Faza 1

B	c_i	$\hat{x}_i$	0	0	0	0	0	1	θ_i
			x_1	x_2	x_1^e	x_2^e	x_3^e	x_1^a	
x_1^e	0	2	−2	1	1	0	0	0	2
x_1^a	1	8	−1	2	0	−1	0	1	4
x_3^e	0	5	1	1	0	0	1	0	5
		8	−1	2	0	−1	0	0	
x_2	0	2	−2	1	1	0	0	0	—
x_1^a	1	4	3	0	−2	−1	0	1	4/3
x_3^e	0	3	3	0	−1	0	1	0	1
		4	3	0	−2	−1	0	0	
x_2	0	4	0	1	1/3	0	2/3	0	
x_1^a	1	1	0	0	−1	−1	−1	1	
x_1	0	1	1	0	−1/3	0	1/3	0	
		1	0	0	−1	−1	−1	0	

este incompatibil. Adunînd ecuațiile (38) se obține relația:

$$x_1^e + x_2^e + x_3^e = -1,$$

care nu poate avea loc deoarece: $x_1^e,\ x_2^e,\ x_3^e \geqslant 0$.

Incompatibilitatea rezultă și din soluția geometrică (fig. 154).

În nici una din cele 7 regiuni nu avem satisfăcute simultan inecuațiile (36).

Exemplul 4. *Cazul în care minimul este nemărginit.*

$$\begin{aligned} &\min\ (-\ x_1 + x_2) \\ &-2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ &x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \\ &x_1 + x_2 \geqslant 5 \\ &x_1,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Soluție. Se scrie programul dat sub forma standard și apoi introducem variabila artificială x_1^a în ecuația a treia:

$$\begin{aligned} &f = (-\ x_1 + x_2) + x_1^a \to \min. \\ &-2x_1 + x_2 + x_1' = 2 \\ &x_1 - 2x_2 + x_2' = 2 \\ &x_1 + x_2 - x_3^e + x_1^a = 5 \\ &x_1,\ x_2,\ x_1^a \geqslant 0;\ x_i' \geqslant 0;\ i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{40}$$

În faza 1 se rezolvă programul: $\varphi = x_1^a \to \min$ în condițiile (40).

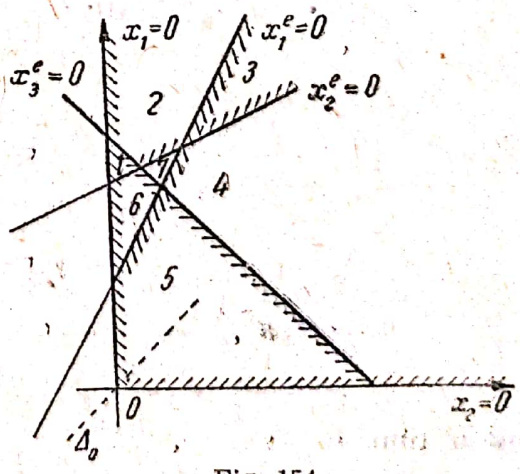


Fig. 154.

Faza 1

B_i	c_i	$\tilde{x}_i$	0	0	0	0	0	1	θ_i
			x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	x_1''	
x_1'	0	2	−2	1	1	0	0	0	—
x_2'	0	2	**1**	−2	0	1	0	0	**2**
x_1''	1	5	1	1	0	0	−1	1	5
		5	**1**	1	0	0	−1	0	
x_1'	0	6	0	−3	1	2	0	0	—
x_1	0	2	1	2	0	1	0	0	1
x_1''	1	3	0	**3**	0	−1	−1	1	**1**
		3	0	**3**	0	−1	−1	0	
x_1'	0	9	0	0	1	1	−1		
x_1	0	4	1	0	0	1/3	−2/3		
x_2	0	1	0	1	0	−1/3	−1/3		
		0	0	0	0	0	0		

Faza 1 se termină cu $\min \varphi = 0$; $\tilde{x}_1 = 4$; $\tilde{x}_2 = 1$; $\tilde{x}_1' = 9$; $\tilde{x}_2' = \tilde{x}_3' = 0$. În faza 2 se rezolvă programul:

$$\min\ (-x_1 + x_2)$$

$$-2x_1 + x_2 + x_1' = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_2' = 2$$

$$x_1 + x_2 - x_3' = 5$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0;\ x_i' \geqslant 0;\ i = 1, 2, 3,$$

pornind de la soluția de bază obținută în faza 1.

Faza 2

B	c_i	$\tilde{x}_i$	−1	1	0	0	0	θ_i
			x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	
x_1'	0	9	0	0	1	1	−1	—
x_1	−1	4	1	0	0	1/3	−2/3	—
x_2	1	1	0	1	0	−1/3	−1/3	—
		−3	0	0	0	−2/3	1/3	

Deoarece în ultima linie mai avem un element pozitiv, soluția obținută $x_1 = 4$; $\tilde{x}_2 = 1$; $\tilde{x}_1' = 9$; nu poate fi considerată ca minimă, urmînd a introduce în bază variabila x_3'.

Dar acest lucru nu este posibil deoarece toți coeficienții lui sînt negativi. În concluzie, funcția $z = -x_1 + x_2$ poate descreşte oricît, neavînd un minim finit.

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta se observă și din interpretarea geometrică din figura 155. Oricît am deplasa dreapta Δ_0 paralel cu ea însăși în sensul indicat de săgeată, ea va avea puncte comune cu poligonul P al soluțiilor admisibile. Vîrful $A(4, 1)$ corespunde soluției obținută prin metoda simplex: $z = -3$.

Un punct oarecare $M(x_1, x_2)$ situat pe dreapta $x_1 - 2x_2 = 2$, va avea coordonatele $M(2x_2 + 2; x_2)$, iar funcția scop:

$$z = -x_1 + x_2 =$$

$$= -2x_2 - 2 + x_2 = -x_2 - 2;$$

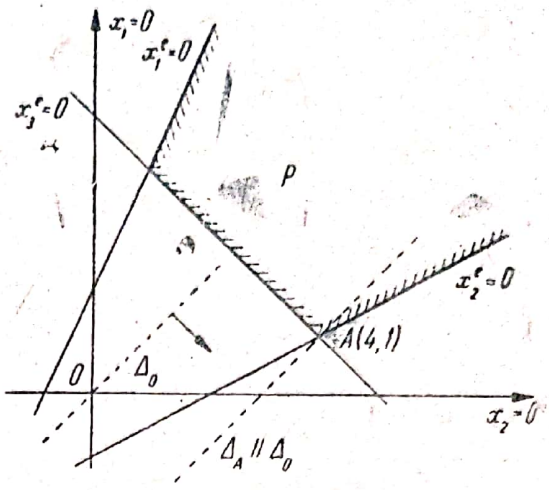


Fig. 155.

$$\min z = \lim_{x_2 \to \infty} (-x_1 + x_2) = \lim_{x_2 \to \infty} (-x_2 - 2) = -\infty$$

Exemplul 5: *Cazul în care minimul nu este unic.*

$$\min (-x_1 + x_2)$$
$$-2x_1 + x_2 \leqslant 2$$
$$x_1 - x_2 \leqslant 2$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 5$$
$$x_1, \; x_2 \geqslant 0.$$

Soluție. Scriem programul dat sub forma standard:

$$\min (-x_1 + x_2)$$
$$-2x_1 + x_2 + x_1' = 2$$
$$x_1 - x_2 + x_2' = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3' = 5$$
$$x_1, \; x_2 \geqslant 0; \; x_i' \geqslant 0; \; i = 1, 2, 3.$$

Cunoscînd soluția de bază:

$$x_1' = 2; \; x_2' = 2; \; x_3' = 5; \; x_1 = x_2 = 0;$$

se întocmește tabela simplex.

După prima iterație s-a obținut soluția optimă:

$$x_1 = 2; \; x_2 = 0; \; x_1' = 6; \; x_2' = 0; \; x_3' = 3;$$
$$\min (-x_1 + x_2) = -2.$$

Se constată că, deși optimul funcției scop a fost atins, putem introduce în bază variabila x_2.

Scanned with OKEN Scanner

Se obţine astfel în iteraţia a doua o nouă soluţie optimă:

$$x_1 = \frac{7}{2}\ ;\ x_2 = \frac{3}{2}\ ;\ x_1' = \frac{15}{2}\ ;\ x_2' = x_3' = 0$$

B	c_i	$\hat{x}_i$	-1	1	0	0	0	θ_i
			x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	
x_1'	0	2	−2	1	1	0	0	—
x_2'	0	2	1	−1	0	1	0	2
x_3'	0	5	1	1	0	0	1	5
		0	1	−1	0	0	0	
x_1'	0	6	0	−1	1	2	0	—
x_1	−1	2	1	−1	0	1	0	—
x_3'	0	3	0	2	0	−1	1	3/2
		−2	0	0	0	−1	0	
x_1'	0	15/2	0	0	1	3/2	1/2	15
x_1	−1	7/2	1	0	0	1/2	1/2	7
x_2	1	3/2	0	1	0	−1/2	1/2	3
		−2	0	0	0	−1	0	

pentru care funcţia scop are aceeaşi valoare minimă:

$$\min\ (-x_1 + x_2) = -2.$$

Problema dată, avînd două soluţii optime, admite o infinitate de soluţii optime şi anume, mulţimea tuturor punctelor situate pe segmentul $A_1A_2 \| \Delta_0$, (fig. 156), dar toate aceste soluţii conduc la aceeaşi valoare minimă a funcţiei scop. Cum $A_1(2, 0)$; $A_2\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$, aceste soluţii sînt:

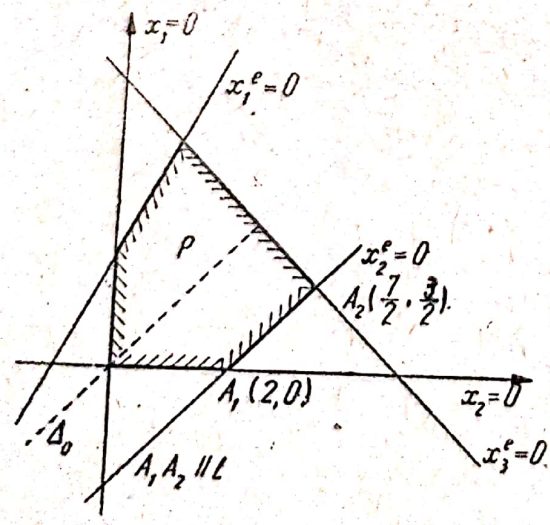


Fig. 156.

$$x_1 = 2\lambda_1 + \frac{7}{2}\lambda_2;$$

$$x_2 = \frac{3}{2}\lambda_2;$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1;\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in [0, 1]$$

$$\min\ (-x_1 + x_2) = -2.$$

Se verifică din nou afirmaţia: dacă o funcţie liniară atinge valoarea optimă în două puncte extreme, ea are aceeaşi valoare optimă pe mulţimea punctelor situate pe segmentul definit de aceste puncte.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 6. *Cazul în care soluția este degenerată.*

$$\min\ (-x_1 + x_2)$$
$$2x_1 - x_2 \leqslant 4$$
$$x_1 - 2x_2 \leqslant 2$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 5$$
$$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$$

Soluție. Întocmai tabela simplex pentru programul adus la forma standard:

$$\min\ (-x_1 + x_2)$$
$$2x_1 - x_2 + x_1' = 4$$
$$x_1 - 2x_2 + x_2' = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3' = 5$$
$$x_1,\ x_2 \geqslant 0;\ x_i' \geqslant 0;\ i = 1, 2, 3,$$

pentru care se cunoaște soluția de bază:

$$x_1' = 4;\ x_2' = 2;\ x_3' = 5;\ x_1 = x_2 = 0.$$

B	c_i	$\bar{x}_i$	-1	1	0	0	0	θ_i
			x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	
x_1'	0	4	**2**	-1	1	0	0	**2**
x_2'	0	2	1	-2	0	1	0	2
x_3'	0	5	1	1	0	0	1	5
		0	**1**	-1	0	0	0	
x_1	-1	2	1	$-1/2$	$1/2$	0	0	
x_2'	0	0	0	$-3/2$	$-1/2$	1	0	
x_3'	0	3	0	$3/2$	$-1/2$	0	1	
		-2	0	$-1/2$	$-1/2$	0	0	

După prima iterație s-a obținut soluția optimă:

$$x_1 = 2;\ x_2' = 0;\ x_3' = 3;$$
$$x_2 = x_1' = 0;$$
$$\min\ (-x_1 + x_2) = -2,$$

care este degenerată, deoarece conține numai două valori strict pozitive x_1 și x_3', iar $x_2' = 0$.

Degenerarea provine din faptul că prin vîrful A_1 al poligonului P al soluțiilor admisibile (fig. 157) trec 3 drepte:

$$x_2 = 0;\ x_1' = 0;\ x_2' = 0.$$

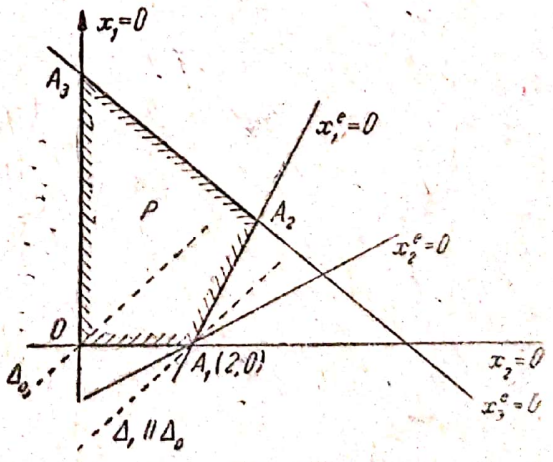


Fig. 157.

În general, fiecărui vîrf al poligonului P îi corespunde o soluție de bază. Soluția va fi degenerată, dacă printr-un același vîrf trec mai mult de două drepte, deoarece în acest caz vom avea mai mult decît două variabile egale cu zero.

Observații. În exemplul dat avem două valori minime egale pentru raportul θ_i. Se putea elimina din bază oricare din cele două variabile x_1' sau x_2'. Noi am ales pe x_1', deoarece în baza criteriului stabilit de Charnes [2], se elimină din bază variabila situată pe linia cea mai de sus din tabela simplex (prima variabilă din bază care a condus la θ_i minim, care în exemplul dat este x_1'). Dacă nu se ține seama de acest criteriu se ajunge la aceeași soluție optimă, după un număr mai mare de iterații.

În exemplul dat ar fi fost necesare următoarele două iterații:

B	c_i	$\tilde{x}_i$	-1	1	0	0	0	θ_i
			x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3'	
x_1'	0	4	2	−1	1	0	0	2
x_2'	0	2	1	−2	0	1	0	2
x_3'	0	5	1	1	0	0	1	5
		0	1	−1	0	0	0	
x_1'	0	0	0	3	1	−2	0	0
x_1	−1	2	1	−2	0	1	0	—
x_3'	0	3	0	3	0	−1	1	1
		−2	0	1	0	−1	0	
x_2	1	0	0	1	1/3	−2/3	0	
x_1	−1	2	1	0	2/3	−1/3	0	
x_3'	0	3	0	0	−1	1	1	
		−2	0	0	−1/3	−1/3	0	

După iterația a doua se ajunge la aceeași soluție optimă:

$$x_1 = 2;\ x_2 = 0;\ x_3' = 3;\ x_1' = x_2' = 0;\ \min\ (-x_1 + x_2) = -2.$$

Cazul în care se introduce o singură variabilă artificială.

Dacă programul liniar este de forma:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_i' = b_i; \qquad (41)$$

$$b_i > 0;\ x_i' \geq 0;\ i = 1, 2, \ldots, m$$

se poate obține o soluție de bază introducînd o singură variabilă artificială x_0, în fiecare din cele m ecuații ale sistemului (41). Sistemul de restricții devine:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_i' + x_0 = b_i. \qquad (42)$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $b_k = \max\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Scăzînd din ecuaţia k, toate celelalte ecuaţii ale sistemului (42), se obţine programul:

$$F = (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) + x_0 \to \min$$
$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n - x_k + x_0 = b_k$$
$$(a_{i1} - a_{k1})x_1 + \ldots + (a_{in} - a_{kn})x_n + x_i' - x_k' = b_i - b_k;$$

care, pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$; $x_k' = 0$, admite soluţia de bază:

$$x_0 = b_k > 0;\ x_i' = b_i - b_k \geqslant 0;\ i \neq k = 1, 2, \ldots, m.$$

Această metodă are avantajul că reduce cu $m - 1$ numărul coloanelor din tabela simplex, micşorînd în mod apreciabil volumul de calcule.

Exemplul 7. Să se rezolve programul liniar standard:

$$\begin{aligned} f = {} & 6x_1 + 7x_2 \to \min. \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_5 = 2 \\ & 10x_1 + x_2 - x_6 = 5 \\ & x_j \geqslant 0;\ j = 1, 2, \ldots, 6. \end{aligned} \tag{43}$$

Soluţie. Folosind procedeul indicat, introducem variabila artificială x_0 şi programul devine:

$$\begin{aligned} F = {} & (6x_1 + 7x_2) + x_0 \to \min \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 + x_0 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_0 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_5 + x_0 = 2 \\ & 10x_1 + x_2 - x_6 + x_0 = 5. \end{aligned}$$

Cum $\max\{3, 6, 2, 5\} = 6$, se scad din ecuaţia a doua celelalte ecuaţii şi se obţine programul:

$$\begin{aligned} F = {} & (6x_1 + 7x_2) + x_0 \to \min \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_0 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 + x_3 = 3 \\ & 3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ & -6x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 1 \\ & x_j \geqslant 0;\ x_0 > 0;\ j = 1, 2, \ldots, 6; \end{aligned}$$

care admite soluţia de bază:

$$x_0 = 6;\ x_3 = 3;\ x_5 = 4;\ x_6 = 1;\ x_1 = x_2 = x_4 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd metoda celor două faze, se obține succesiv :

Faza 1

B	c_j	$\bar{x}_j$	0 x_1	0 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	1 x_0	θ_i
x_0	1	6	4	3	0	−1	0	0	1	3/2
x_3	0	3	1	2	1	−1	0	0	0	3
x_5	0	4	3	1	0	−1	1	0	0	4/3
x_6	0	1	−6	2	0	−1	0	1	0	—
		6	4	3	0	−1	0	0	0	
x_0	1	2/3	0	5/3	0	1/3	−4/3	0	1	2/5
x_3	0	5/3	0	5/3	1	−2/3	−1/3	0	0	1
x_1	0	4/3	1	1/3	0	−1/3	1/3	0	0	4
x_6	0	9	0	4	0	−3	2	1	0	9/4
		2/3	0	5/3	0	1/3	−4/3	0	0	
x_2	0	2/5	0	1	0	1/5	−4/5	0		
x_3	0	1	0	0	1	−1	1	0		
x_1	0	6/5	1	0	0	−2/5	3/5	0		
x_6	0	37/5	0	0	0	−19/5	26/5	1		
		0	0	0	0	0	0	0		

Faza 2

B	c_j	$\bar{x}_j$	6 x_1	7 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	θ_i
x_2	7	2/5	0	1	0	1/5	− 4/5	0	
x_3	0	1	0	0	1	− 1	1	0	
x_1	6	6/5	1	0	0	− 2/5	3/5	0	
x_6	0	37/5	0	0	0	−19/5	26/5	1	
		10	0	0	0	−1	−2	0	

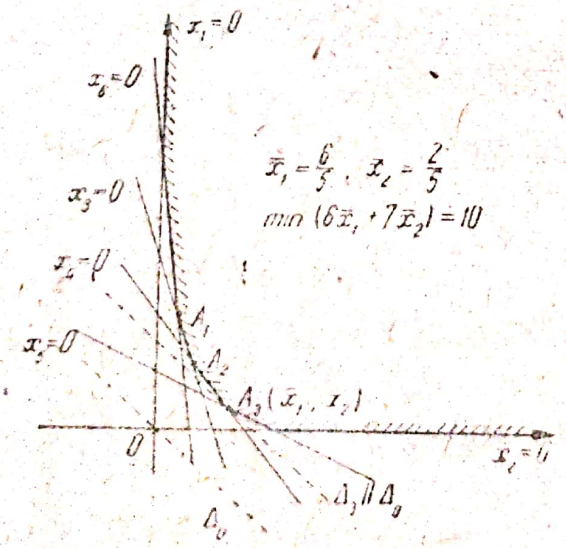


Fig. 158.

Soluția optimă obținută în faza 1 după două iterații, este optimă și pentru faza 2 :

$$\bar{x}_1 = \frac{6}{5}\,;\quad \bar{x}_2 = \frac{2}{5}\,;\quad \bar{x}_3 = 1\,;$$

$$\bar{x}_4 = \bar{x}_5 = 0\,;\quad \bar{x}_6 = \frac{37}{5}$$

$$\min\,(6x_1 + 7x_2) = 6\bar{x}_1 + 7\bar{x}_2 = 10.$$

În figura 158 se poate vedea și soluția geometrică, care ne conduce la același rezultat.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii. Dacă am fi introdus cîte o variabilă pentru fiecare ecuaţie, tabela simplex ar fi conţinut $n + m = 6 + 4 = 10$ coloane şi 4 variabile artificiale: x_1^a, x_2^a, x_3^a, x_3^a.

Dăm mai jos soluţia problemei în acest caz.

Faza 1

B	c_j	$\bar{x}_j$	0 x_1	0 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	1 x_1^a	1 x_2^a	1 x_3^a	1 x_3^a	θ_i
x_1^a	1	3	3	1	−1	0	0	0	1	0	0	0	1
x_2^a	1	6	4	3	0	−1	0	0	0	1	0	0	3/2
x_3^a	1	2	1	2	0	0	−1	0	0	0	1	0	2
x_4^a	1	5	**10**	1	0	0	0	−1	0	0	0	1	**1/2**
		16	**18**	7	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	
x_1^a	1	3/2	0	7/10	−1	0	0	3/10	1	0	0		15/7
x_2^a	1	4	0	13/5	0	−1	0	4/10	0	1	0		20/13
x_3^a	1	3/2	0	**19/10**	0	0	−1	1/10	0	0	1		**15/19**
x_1	0	1/2	1	1/10	0	0	0	−1/10	0	0	0		5
		7	0	**26/5**	−1	−1	−1	4/5	0	0	0		
x_1^a	1	18/19	0	0	−1	0	7/19	5/19	1	0	0		18/7
x_2^a	1	37/19	0	0	0	−1	**26/19**	5/19	0	1			**37/26**
x_2	0	15/19	0	1	0	0	−10/19	1/19	0	0			—
x_1	0	8/19	1	0	0	0	1/19	−2/19	0	0			8
		55/19	0	0	−1	−1	**33/19**	10/19	0	0			
x_1^a	1	11/26	0	0	−1	**7/26**	0	5/26	1				**11/7**
x_5	0	37/26	0	0	0	−19/26	1	5/26	0				—
x_2	0	20/13	0	1	0	−5/13	0	4/26	0				—
x_1	0	9/26	1	0	0	1/26	0	−3/26	0				9
		11/26	0	0	−1	**7/26**	0	5/26					
x_4	0	11/7	0	0	−26/7	1	0	5/7					
x_5	0	18/7	0	0	−19/7	0	1	5/7					
x_2	0	15/7	0	1	−10/7	0	0	3/7					
x_1	0	2/7	1	0	1/7	0	0	−1/7					
		0	0	0	0	0	0	0					

În faza 2 se rezolvă programul (43), pornind de la soluţia de bază obţinută în prima fază:

$$x_1 = \frac{2}{7}\ ;\quad x_2 = \frac{15}{7}\ ;\quad x_3 = 0\ ;\quad x_4 = \frac{11}{7}\ ;\quad x_5 = \frac{18}{7}\ ;\quad x_6 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a obținut aceeași soluție, după 6 iterații. Folosind procedeul indicat, soluția optimă a fost obținută pe o tabelă simplex redusă (cu 7 coloane în loc de 10), numai după două iterații.

Cele 6 soluții de bază obținute în faza 2, corespund celor 3 vîrfuri A_1, A_2, A_3 ale poligonului soluțiilor admisibile (fig. 158):

$$A_1\left(\frac{2}{7},\frac{15}{7}\right);\ A_2\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right);\ A_3\left(\frac{6}{5},\frac{2}{5}\right).$$

Faza 2

B	c_j	$\hat{x}_j$	6	7	0	0	0	0	θ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	11/7	0	0	−26/7	1	0	5/7	11/5
x_5	0	18/7	0	0	−19/7	0	1	5/7	18/5
x_2	7	15/7	0	1	−10/7	0	0	3/7	5
x_1	6	2/7	1	0	1/7	0	0	− 1/7	—
		117/5	0	0	−64/7	0	0	15/7	
x_6	0	11/5	0	0	−26/5	7/5	0	1	—
x_5	0	1	0	0	1	− 1	1	0	1
x_2	7	6/5	0	1	4/5	− 3/5	0	0	3/2
x_1	6	3/5	1	0	− 3/5	1/5	0	0	—
		12	0	0	2	− 3	0	0	
x_5	0	37/5	0	0	0	−19/5	26/5	1	
x_3	0	1	0	0	1	− 1	1	0	
x_2	7	2/5	0	1	0	1/5	− 4/5	0	
x_1	6	6/5	1	0	0	− 2/5	3/5	0	
		10	0	0	0	− 1	− 2	0	

Dacă ținem seama că:

— pentru a determina un element din tabela simplex sînt necesare 4 operațiuni elementare la fiecare schimbare a bazei (două înmulțiri, o scădere și o împărțire, efectuate în baza formulei (21);

— elementele situate pe linia pivotului necesită o singură operație de împărțire (efectuată în baza formulei 20);

— elementele situate pe cele m coloane ce corespund variabilelor din bază nu se mai calculează (fiind egale cu elementele corespunzătoare în baza precedentă); se poate arăta că prin procedeul expus, numărul operațiilor elementare se reduce cu:

$$\Delta(m) = (4m + 1)(m - 1)$$

pentru fiecare iterație. În exemplul dat, pentru cele 4 iterații efectuate în plus, s-a realizat o economie de $4 \cdot \Delta(4) = 4 \cdot 17 \cdot 3 = 204$ operațiuni elementare. Eficacitatea metodei este evidentă.

Scanned with OKEN Scanner

Probleme propuse

1. Să se rezolve grafic și prin metoda simplex problema

$$\max\ (2x_1 + x_2)$$
$$x_1 - x_2 \leqslant 4,$$
$$3x_1 - x_2 \leqslant 18,$$
$$-x_1 + 2x_2 \leqslant 6,$$
$$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$$

R. $x_1 = \frac{42}{5}$, $x_2 = \frac{36}{5}$, $\max\ (2x_1 + x_2) = 24$.

2. Folosind metoda celor două faze să se rezolve problema:

$$\max\ (10x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4)$$
$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_3 + x_4 = 12$$
$$2x_2 + x_3 + 3x_4 = 16$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0.$$

R. Se introduc variabilele artificiale x_5, x_6, x_7. În prima fază se minimizează funcția $\varphi = (x_5 + x_6 + x_7)$; în faza a doua maximizăm funcția dată $z = (10x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4)$.

Se va găsi: $x_1 = \frac{17}{3}$, $x_2 = \frac{77}{12}$, $x_3 = \frac{19}{6}$, $x_4 = 0$; $\max z = \frac{217}{12}$.

3. Să se rezolve programul liniar folosind metoda celor două faze.

$$\max(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4),$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15,$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20,$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 20,$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0.$$

R. Se introduc variabilele artificiale x_5 și x_6 în primele două restricții. În prima fază se minimizează funcția $\varphi = x_5 + x_6$; iar în faza a doua se maximizează funcția dată: $z = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4)$. Se va găsi:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{5}{2};\ x_4 = 0;\ \max z = 15.$$

4. Un meniu trebuie să conțină cel puțin 0,6 unități din substanța nutritivă A; 0,9 unități din substanța B; 3 unități din substanța C și 2,5 unități din substanța D. Aceste substanțe se găsesc în două alimente M și N. Să se determine cantitățile x_1 și x_2 din alimentele M și N.

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît costul meniului să fie minim, folosind datele din tabela de mai jos:

Substanţe \ Alimente	M (x_1)	N (x_2)	Necesar biologic
A	0,15	0	0,6
B	0	0,15	0,9
C	0,15	0,30	3
D	0,30	0,15	2,55
Preţ unitar	10	4	—

R. Se va găsi: $x_1 = 4$; $x_2 = 9$; costul minim al meniului 76 lei.

5. La o fermă agricolă s-a planificat o suprafaţă de 300 ha teren arabil pentru cultivarea cu grîu şi porumb.

Pentru cultivarea unui hectar de grîu se cheltuieşte în medie 350 lei, iar pentru cultivarea unui hectar de porumb 200 lei.

Se presupune că recolta medie la grîu este de 2 500 kg/ha şi la porumb este de 3 250 kg/ha.

Beneficiul obţinut din vînzarea grîului este de 0,80 lei/kg, iar al porumbului 0,50 lei/kg.

În planul de cheltuieli s-a prevăzut suma de 70 000 lei pentru ambele culturi.

Se cere să se determine numărul de hectare x_1 şi x_2 care trebuie cultivate cu grîu şi respectiv cu porumb, pentru ca beneficiul total obţinut din vînzarea recoltei să fie maxim.

R. $x_1 = 66\frac{2}{3}$ ha grîu, $x_2 = 233\frac{1}{3}$ ha porumb, $B_{max} = 512\,500$ lei.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL X

PROBLEMA TRANSPORTURILOR

§ 1. Enunțul problemei

Fie: $A_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ m centre de producție unde avem disponibil un produs omogen în cantitățile $a_1, a_2, \ldots, a_m$;

$B_j (j = 1, 2, \ldots, n)$, n centre de consum unde acel produs este necesar în cantitățile $b_1, b_2, \ldots, b_n$;

$d_{ij} (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ distanțele de la centrele de producție A_i la centrele de consum B_j;

c_{ij}, costul transportului unei tone din produsul considerat pe distanța d_{ij}, exprimat în lei/tonă (sau în general, în lei/unitate de produs transportat);

x_{ij}, cantitățile din produsul considerat ce urmează a fi transportate din centrele de producție A_i la centrele de consum B_j. Problema cere să se determine cantitățile de produse x_{ij} ce urmează a fi transportate din A_i în B_j, astfel încît totalul cheltuielilor de transport să fie minim.

§ 2. Modelul matematic

Ținînd seama de enunțul problemei se impun următoarele restricții:

— Cantitatea totală de produse expediate din A_i spre cele n centre de consum B_j trebuie să fie egală cu disponibilul din A_i. Se obține astfel sistemul:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i;\quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1}$$

de m ecuații liniare cu $m \cdot n$ necunoscute, în care primul indice i al necunoscutelor x_{ij} reprezintă centrul de producție (expediție), iar al doilea j, centrul de consum (primire).

— Cantitatea totală de produse primită de centrul B_j de la cele m centre de expediție trebuie să fie egală cu necesarul centrului de consum B_j.

Se obține sistemul de n ecuații liniare cu $m \cdot n$ necunoscute:

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j;\quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

— Cantitățile transportate trebuie să satisfacă condițiile de nenegativitate:

$$x_{i1} \geqslant 0;\ x_{i2} \geqslant 0, \ldots, x_{in} \geqslant 0;\quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

— Problema cere ca planul de transport să se realizeze cu un minim de cheltuieli.

Funcţia care reprezintă totalul cheltuielilor necesare efectuării transportului trebuie să fie minimă:

$$f = c_{11}x_{11} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mn}x_{mn}. \tag{4}$$

— Întreaga cantitate de produse disponibilă în cele m centre de producţie trebuie să fie expediată în întregime celor n centre de consum:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n. \tag{5}$$

Se obţine astfel următorul *model matematic:*

Să se minimizeze funcţia:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \tag{6}$$

în condiţiile:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

$$x_{ij} \geqslant 0; \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = S. \tag{10}$$

Funcţia (6) a cărui minim se caută se numeşte funcţia scop (criteriu). Relaţiile (7), (8), (10) se numesc restricţiile problemei, iar (9) reprezintă condiţiile de nenegativitate.

Folosind tabela 1, modelul unei probleme de transport se poate obţine astfel:

Tabela 1

A_i \ B_j	B_1	B_2	...	B_n	a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	... ...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	... ...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	... ...	... ...	... ...	... ...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	... ...	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	S

— Egalăm suma necunoscutelor x_{ij} din fiecare linie cu cantităţile a_i scrise în ultima coloană şi obţinem ecuaţiile (7).

— Egalăm suma necunoscutelor x_{ij} din fiecare coloană cu cantităţile b_j scrise în ultima linie şi obţinem ecuaţiile (8).

Scanned with OKEN Scanner

— Suma produselor dintre costurile c_{ij} şi necunoscutele x_{ij} scrise în fiecare pătrăţel (celulă) reprezintă funcţia scop (6), al cărei minim se cere.

— Suma cantităţilor a_i din ultima coloană egalată cu suma cantităţilor b_j din ultima linie ne conduce la relaţia (10).

§ 3. Clasificarea soluţiilor

Modelul unei probleme de transport conţine un sistem de $m + n$ ecuaţii liniare cu mn necunoscute. Dacă ţinem seama de relaţia (10) sistemul va conţine numai $m + n - 1$ ecuaţii liniar independente cu mn necunoscute.

Cum pentru $m > 1$; $n > 1$; $m, n \in N$, avem satisfăcută relaţia[1]:

$$m + n - 1 \leqslant mn,$$

rezultă că numărul ecuaţiilor distincte în orice problemă de transport este mai mic decît numărul necunoscutelor.

Sistemul (7), (8) este nedeterminat şi admite deci o infinitate de soluţii.

— Soluţiile care satisfac (7) şi (8) dar nu satisfac (9) se numesc neadmisibile (nerealizabile).

— Soluţiile care satisfac (7), (8) şi (9) se numesc *admisibile* (realizabile).

— Acele soluţii admisibile care conţin cel mult $m + n - 1$ valori $x_{ij} > 0$, celelalte $(m - 1)(n - 1)$ fiind nule se numesc *soluţii de bază*.

— Soluţiile admisibile care conţin exact $m + n - 1$ valori $x_{ij} > 0$, celelalte $(m - 1)(n - 1)$ fiind nule se numesc *soluţii de bază nedegenerate*.

— Soluţiile admisibile care conţin $(m + n - 1) - r$ valori $x_{ij} > 0$, se numesc *soluţii de bază degenerate*, $r \geqslant 1$ fiind ordinul de degenerare[2].

— Acea soluţie de bază nedegenerată (sau degenerată) care conduce la un maxim sau la un minim al funcţiei scop se numeşte *soluţie optimă*.

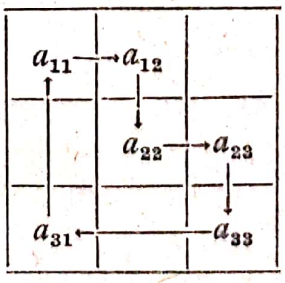
Ciclu. Numim ciclu un număr par de celule distincte de forma:

$$a_{i_1 j_1},\ a_{i_1 j_2},\ a_{i_2 j_2},\ \ldots,\ a_{i_h j_h},\ a_{i_h j_1}.$$

De exemplu, ciclul format din celulele:

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{33},\ a_{31},$$

marcat prin săgeţi în schema de mai jos, conţine 6 celule.



[1] Dacă o vom scrie sub forma $n - 1 < m(n - 1)$ şi ţinem seama de condiţia $n > 1$, rezultă $m > 1$, ceea ce justifică afirmaţia noastră.

[2] Dacă $r = 1, 2, \ldots, h$ vom spune că avem o degenerare simplă, dublă, ..., multiplă de ordinul h.

Celulele a_{11}, a_{22}, a_{33}, care ocupă locurile 1, 3, 5 în ciclu le vom numi celule impare, iar celulele a_{12}, a_{23}, a_{31}, care ocupă locurile 2, 4, 6 le vom numi celule pare.

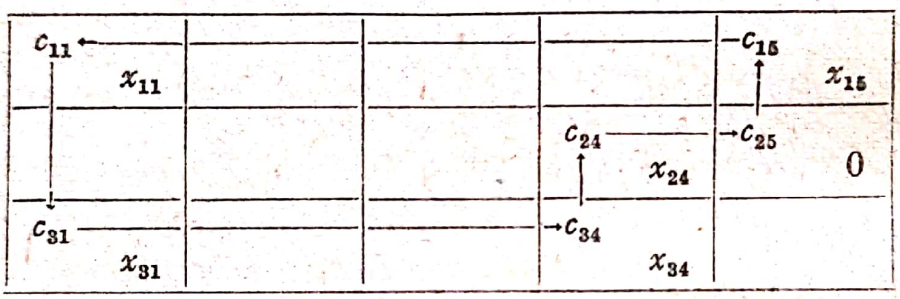
Bază. Fie $X^0 = (x_{ij}^0)$ o soluție de bază a unei probleme de transport. Numim bază și o notăm cu B mulțimea celulelor a_{ij} ce conțin numai valori $x_{ij} > 0$.

O bază poate conține cel mult $m + n - 1$ celule a_{ij} și cel puțin n (dacă problema admite o degenerare multiplă de ordinul $m - 1$). Dacă o soluție de bază este nedegenerată, se poate arăta că pentru fiecare celulă ce corespunde unei valori $x_{ij} = 0$, există un *ciclu unic* care conține această celulă, celelalte celule ce compun ciclul fiind ocupate numai de valori $x_{ij} > 0$.

Evaluarea unei celule. Prin definiție evaluarea unei celule $a_{ij} \notin B$, pe care o vom nota s_{ij} este dată de expresia:

$$s_{ij} = c_{ij} - c_{ij_1} + c_{i_1j_1} - c_{i_1j_2} + \ldots + c_{i_kj_k} - c_{i_kj}.$$

Exemplu. Folosind datele din schema de mai jos, evaluarea celulei a_{25} (în care $x_{25} = 0$) este dată de relația:



$$s_{25} = c_{25} - c_{15} + c_{11} - c_{31} + c_{34} - c_{24}.$$

Se arată că evaluarea unei celule a_{ij} reprezintă cantitatea cu care se modifică (crește sau se reduce) funcția scop dacă x_{ij} crește cu o unitate.

În exemplul dat, valoarea funcției scop ce corespunde celulei a_{25} după majorarea lui x_{25} cu o unitate va fi[1]:

$$f_1(a_{25}) = c_{25} \cdot 1 + c_{15}(x_{15} - 1) + c_{11}(x_{11} + 1) + c_{31}(x_{31} - 1) + c_{34}(x_{34} + 1) + c_{24}(x_{24} - 1).$$

$$f_1(a_{25}) = (c_{15}x_{15} + c_{11}x_{11} + c_{31}x_{31} + c_{34}x_{34} + c_{24}x_{24}) + (c_{25} - c_{15} + c_{11} - c_{31} + c_{34} - c_{24}).$$

$$f_1(a_{25}) = f_0(a_{25}) + s_{25} \qquad (11)$$

în care $f_0(a_{25})$ reprezintă funcția scop în ipoteza în care am presupus $x_{25} = 0$. Din relația (11) rezultă că funcția scop a crescut (sau s-a redus) cu cantitatea s_{25} după cum $s_{25} > 0$ (sau $s_{25} < 0$).

---

[1] Deoarece am majorat pe x_{25}, am scăzut și am adunat alternativ o unitate cînd am trecut de la un colț la altul al ciclului. În acest mod ecuațiile (7) și (8) rămîn satisfăcute.

Scanned with OKEN Scanner

§ 4. Determinarea unei soluții inițiale

Pentru a rezolva o problemă de transport se pornește de la o soluție inițială de bază care se obține astfel:

— Se dă unei variabile oarecare x_{ij} valoarea:

$$\tilde{x}_{ij} = \min \{a_i, b_j\}.$$

— Dacă $a_i < b_j$; $\tilde{x}_{ij} = a_i$. Se suprimă linia i, iar b_j se va înlocui cu $b_j^{(1)} = b_j - a_i$.

— Dacă $a_i > b_j$; $\tilde{x}_{ij} = b_j$. Se suprimă coloana j, iar a_i se va înlocui cu $a_i^{(1)} = a_i - b_j$.

Se obține astfel un tabel redus cu o linie (sau cu o coloană) față de tabelul inițial. Procedeul se repetă pînă cînd toate centrele de consum au fost satisfăcute.

Distingem următoarele cazuri particulare mai importante:

1°. *Metoda colțului nord-vest*[1]. Se alege variabila x_{11} situată pe prima linie și prima coloană (în colțul nord-vest al tabelei).

Dacă $\min \{a_1, b_1\} = a_1$, atunci $\tilde{x}_{11} = a_1$; $\tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{13} = \ldots = \tilde{x}_{1n} = 0$. Se suprimă prima linie și se determină x_{21} din relația:

$$\tilde{x}_{21} = \min \{a_2, b_1 - a_1\}.$$

Dacă $\min \{a_1, b_1\} = b_1$, atunci $\tilde{x}_{11} = b_1$; $\tilde{x}_{21} = \tilde{x}_{31} = \ldots = \tilde{x}_{m1} = 0$. Se suprimă prima coloană și se determină $\tilde{x}_{12}$ din relația:

$$\tilde{x}_{12} = \min \{a_1 - b_1, b_2\}.$$

Procedeul se repetă determinînd succesiv valorile x_{ij} situate pe prima linie și prima coloană rămasă nesuprimată.

2°. *Metoda costului minim pe linie.* Se alege variabila x_{1j} situată pe prima linie ce corespunde celulei în care costul c_{1j} este minim:

$$c_k = \min \{c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}\}; \; k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Se determină apoi $\tilde{x}_{1k}$ din relația:

$$\tilde{x}_{1k} = \min \{a_1, b_k\}.$$

Dacă $a_1 < b_k$; $\tilde{x}_{1k} = a_1$; $\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{12} = \ldots = \tilde{x}_{1,k-1} = \tilde{x}_{1,k+1} = \ldots = \tilde{x}_{1n} = 0$; se suprimă prima linie și procedeul se repetă cu linia a doua.

Dacă $a_1 > b_k$; $\tilde{x}_{1k} = b_k$; $\tilde{x}_{2k} = \tilde{x}_{3k} = \ldots = \tilde{x}_{mk} = 0$; se suprimă coloana k și procedeul se continuă, alegînd variabila x_{1j} situată pe prima linie ce corespunde costului minim rămas după suprimarea coloanei k. Procedeul se repetă pînă cînd toate valorile x_{1j} situate pe prima linie au fost determinate.

Se continuă apoi în mod analog și cu celelalte linii.

3°. *Metoda costului minim pe coloană.* Se alege variabila x_{i1} situată pe prima coloană ce corespunde celulei în care costul c_{i1} este minim:

$$c_{r1} = \min \{c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{m1}\}; \; r \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Se determină apoi $\tilde{x}_{r1}$ din relația:

$$\tilde{x}_{r1} = \min \{a_r, b_1\}.$$

---

[1] Propusă de G. B. Dantzig a fost numită de A. Charnes și W. Cooper metoda colțului nord-vest (sau metoda distribuției în scară).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a_r < b_1$; $\hat{x}_{r1} = a_r$; $\hat{x}_{r2} = \hat{x}_{r3} = \ldots = \hat{x}_{rn} = 0$; se suprimă linia r și procedeul se continuă, alegînd variabila x_{i1} situată pe prima coloană și care corespunde costului minim rămas după suprimarea liniei r.

Dacă $a_r > b_1$; $\hat{x}_{r1} = b_1$; $\hat{x}_{11} = \hat{x}_{21} = \ldots = \hat{x}_{r-1,1} = \hat{x}_{r+1,1} = \ldots = \hat{x}_{m1} = 0$, se suprimă prima coloană și procedeul se repetă cu coloana a doua.

Se continuă în mod analog și cu celelalte coloane.

4°. *Metoda costului minim al matricei.* Se alege variabila x_{ij} ce corespunde celulei în care costul c_{ij} este minim.

Dacă:

$$c_{rk} = \min_{i,j} \{c_{ij}\},$$

se determină $\hat{x}_{rk}$ din relația:

$$\hat{x}_{rk} = \min \{a_r, b_k\}.$$

Procedeul se repetă în mod analog pînă ce toate valorile x_{ij} au fost determinate.

Oricare din metodele expuse 1°,..., 4° conduc la determinarea unei soluții de bază, care verifică (7), (8), (9).

Exemplul 1. Să se determine o soluție inițială de bază a problemei de transport ale cărei date au fost trecute în tabela 2.

Tabela 2

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	68 x_{11}	64 x_{12}	48 x_{13}	24 x_{14}	60 x_{15}	36 x_{16}	78
A_2	38 x_{21}	42 x_{22}	44 x_{23}	28 x_{24}	32 x_{25}	34 x_{26}	87
A_3	36 x_{31}	46 x_{23}	52 x_{33}	50 x_{34}	40 x_{35}	22 x_{36}	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

Metoda nord-vest ne conduce la soluția inițială de bază din tabela 3.

Tabela 3

i \ j	1	2	3	4	5	6	a
1	68 24	64 48	48 | 6	24 0	60 0	36 0	78
2	38 0	42 0	44 | 28	28 32	32 | 27	34 0	87
3	36 0	46 0	52 0	50 0	40 | 41	22 14	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

$f_0 = 9932$

Scanned with OKEN Scanner

Se constată uşor că relaţiile (7), (8) sînt satisfăcute:

— Făcînd suma valorilor x_{ij} pe linii se obţin numerele a_i din ultima coloană.

— Sumele x_{ij} pe coloane sînt egale cu numerele b_j din ultima linie.

Soluţia iniţială obţinută este nedegenerată deoarece conţine exact $m + n - 1 = 3 + 6 - 1 = 8$ valori $x_{ij} > 0$.

Valoarea funcţiei scop pentru această soluţie este:

$$f_0 = 68 \cdot 24 + 64 \cdot 48 + 48 \cdot 6 + 44 \cdot 28 + 28 \cdot 32 + 32 \cdot 27 + \\ + 40 \cdot 41 + 22 \cdot 14 = 9932.$$

Exemplul 2. Să se determine o soluţie iniţială a problemei de transport din tabela 2, folosind metoda elementului minim pe linie.

Folosind procedeul indicat în 2°, se obţine succesiv:

$$\min \{c_{1j}\} = c_{14} = 24; \; j = 1, 2, \ldots, 6$$

$$\tilde{x}_{14} = \min \{a_1, b_4\} = \min \{32, 78\} = 32.$$

Rezultă:

$$\tilde{x}_{14} = 32; \; \tilde{x}_{24} = \tilde{x}_{34} = 0.$$

Elementul minim rămas în prima linie după c_{14} este $c_{16} = 36$.

Rezultă:

$$\tilde{x}_{16} = \min \{78 - 32, 14\} = 14; \; \tilde{x}_{26} = \tilde{x}_{36} = 0.$$

Elementul minim rămas după c_{14} şi c_{16} este $c_{13} = 48$.

Rezultă:

$$\tilde{x}_{13} = \min \{78 - 32 - 14, 34\} = \min \{32, 34\} = 32.$$

Valorile $\tilde{x}_{1j}$ situate pe prima linie au fost complet determinate:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{12} = 0; \; \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{14} = 32; \; \tilde{x}_{15} = 0; \; \tilde{x}_{16} = 14.$$

Procedînd în mod analog şi cu linia a doua şi a treia se obţine soluţia iniţială de bază din tabela 4.

Tabela 4

i \ j	1	2	3	4	5	6	a_i
1	68 0	64 0	48 32	24 32	60 0	36 14	78
2	38 19	42 0	44 0	28 0	32 68	34 0	87
3	36 5	46 48	52 2	50 0	40 0	22 0	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

$f_0 = 8198$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia scop are valoarea:

$$f_0 = 48 \cdot 32 + 24 \cdot 32 + 36 \cdot 14 + 38 \cdot 19 + 32 \cdot 68 + 36 \cdot 5 + \\ + 46 \cdot 48 + 52 \cdot 2 = 8\,198.$$

Exerciţiu. Să se determine o soluţie iniţială de bază şi valoarea funcţiei scop corespunzătoare, folosind metoda elementului minim pe coloană şi metoda elementului minim al matricei.

R. Metoda elementului minim pe coloană ne conduce la soluţia:

$$\bar{x}_{14} = \bar{x}_{15} = 32;\ \bar{x}_{16} = 14;\ \bar{x}_{22} = 48;\ \bar{x}_{23} = 34;\ \bar{x}_{25} = 5;\ \bar{x}_{31} = 24;$$

$$\bar{x}_{35} = 31,$$

celelalte valori $\bar{x}_{ij}$ fiind egale cu zero $f_0 = 8\,968$.

Metoda elementului minim al matricei ne dă soluţia:

$$\bar{x}_{12} = 12;\ \bar{x}_{13} = 34;\ \bar{x}_{14} = 32;\ \bar{x}_{22} = 19;\ \bar{x}_{25} = 68;\ \bar{x}_{31} = 24;\ \bar{x}_{32} = 17;$$

$\bar{x}_{36} = 14$, celelalte valori $\bar{x}_{ij}$ fiind egale cu zero. $f_0 = 8\,368$.

* * *

După obţinerea unei soluţii iniţiale de bază, prin una din metodele expuse, se procedează la verificarea ei pentru a şti dacă este optimă.

În cazul în care se constată că nu este optimă se trece la îmbunătăţirea ei, micşorînd funcţia scop dacă se cere minimizarea ei, sau majorînd-o dacă se caută maximul.

În acest scop vom expune:

§ 5. Metoda distributivă modificată

elaborată de A. Charnes şi W. Cooper

Se consideră toate costurile c_{ij} ce corespund celor $m + n - 1$ valori $x_{ij} > 0$ din soluţia iniţială de bază $(x_{ij} \in B)$.

Fiecăruia din aceste costuri îi asociem cîte o pereche de numere (u_i, v_j) astfel încît:

$$u_i + v_j = c_{ij}. \tag{12}$$

Se determină apoi u_i şi v_j rezolvînd sistemul (12), care este format din $m + n - 1$ ecuaţii cu $m + n$ necunoscute.

Pentru a obţine o soluţie unică a acestui sistem se dă în mod arbitrar uneia din necunoscute valoarea zero (de exemplu, facem $u_1 = 0$). Se rezolvă apoi sistemul găsind pentru u_i şi v_j valori unice.

Folosind soluţiile găsite $(u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ se determină costurile $\bar{c}_{ij}$ ce corespund valorilor $x_{ij} = 0$, astfel încît:

$$\bar{c}_{ij} = u_i + v_j, \tag{13}$$

Scanned with OKEN Scanner

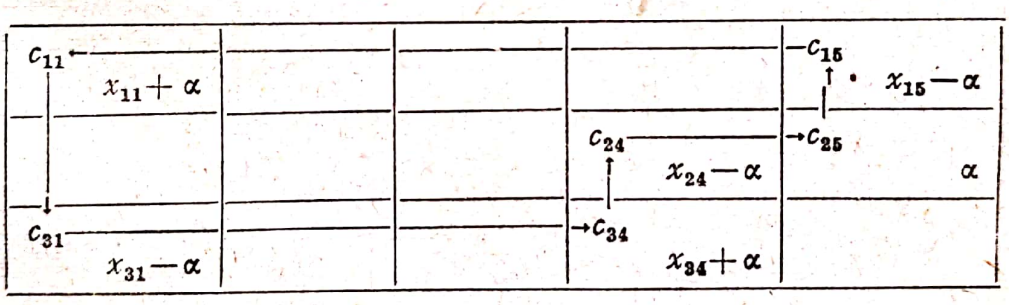
Calculele necesare pentru a rezolva sistemul (12) și pentru a găsi valorile $\bar{c}_{ij}$ se fac direct pe tabela 5.

Tabela 5

u_i \ v_j	v_1	v_2	...	v_n
u_1	c_{11} $\bar{c}_{11}$	c_{12} $\bar{c}_{12}$	... ...	c_{1n} $\bar{c}_{1n}$
u_2	c_{21} $\bar{c}_{21}$	c_{22} $\bar{c}_{22}$	... ...	c_{2n} $\bar{c}_{2n}$
...	.....	.....	.....	.....
u_m	c_{m1} $\bar{c}_{m1}$	c_{m2} $\bar{c}_{m2}$	... ...	c_{mn} $\bar{c}_{mn}$

§ 5.1. **Verificarea optimalității.** A verifica optimalitatea unei soluții (în cazul în care se cere minimul funcției scop) înseamnă a arăta că oricare altă soluție conduce la o valoare mai mare a funcției scop și în consecință nu mai poate fi redusă. Pentru aceasta se calculează evaluarea s_{ij} pentru celulele ce corespund valorilor $x_{ij} = 0$.

Să considerăm ciclul $C(2, 5) = \{c_{25}, c_{15}, c_{11}, c_{31}, c_{34}, c_{24}\}$, ce corespunde celulei a_{25} pentru care avem $x_{25} = 0$ și să presupunem că $x_{25} = \alpha > 0$. Dacă notăm cu $f_{25}(0)$ și $f_{25}(\alpha)$ valoarea funcției scop pentru $x_{25} = 0$ și $x_{25} = \alpha$ și folosim schema de mai jos se obține:



$$f_{25}(\alpha) = \alpha c_{25} + c_{15}(x_{15} - \alpha) + c_{11}(x_{11} + \alpha) + c_{31}(x_{31} - \alpha) + c_{34}(x_{34} + \alpha) + c_{24}(x_{24} - \alpha) = (c_{15}x_{15} + c_{11}x_{11} + c_{31}x_{31} + c_{34}x_{34} + c_{24}x_{24}) + \alpha(c_{25} - c_{15} + c_{11} - c_{31} + c_{34} - c_{24}).$$

$$f_{25}(\alpha) = f_{25}(0) + \alpha s_{25}. \tag{14}$$

În general, se va obține o relație de forma:

$$f_{ij}(\alpha) = f_{ij}(0) + \alpha s_{ij}; \qquad \alpha > 0 \tag{15}$$

pentru toate celulele ce corespund valorilor $x_{ij} = 0$.

Rezultă că:

— Dacă $s_{ij} > 0$, pentru toate celulele a_{ij} în care $x_{ij} = 0$ (16)

și $s_{ij} = 0$, pentru toate celulele a_{ij} în care $x_{ij} > 0$ (17)

funcția scop nu se mai poate reduce; ea este optimă (minimă) și unică.

Scanned with OKEN Scanner

— Dacă (16) și (17) sînt satisfăcute, dar avem și $s_{ij} = 0$, pentru unele celule în care $x_{ij} = 0$, problema admite o infinitate de soluții minime, care conduc la aceeași valoare minimă a funcției scop. Pentru a justifica această afirmație să observăm că, dacă $s_{ij} = 0$, din (15) rezultă:

$$f_{ij}(\alpha) = f_{ij}(0); \qquad \alpha > 0,$$

iar condițiile de nenegativitate conduc la următorul sistem de inecuații:

$$x_{15} - \alpha \geqslant 0;\ x_{31} - \alpha \geqslant 0;\ x_{24} - \alpha \geqslant 0;\ \alpha \geqslant 0 \tag{18}$$

ale cărui soluții depind de valorile lui x_{15}, x_{31}, x_{24}.

Dacă presupunem:

$$0 < x_{15} < x_{31} < x_{24},$$

se obține soluția*:

$$\alpha \in [0,\ x_{15}].$$

Problema de transport va admite o infinitate de soluții care se obțin dînd lui α toate valorile reale cuprinse în intervalul $[0, x_{15}]$.

Dacă soluțiile problemei nu au sens decît în numere întregi, ea va admite un număr finit de soluții și anume soluțiile ce corespund numerelor naturale situate în intervalul $[0, x_{15}]$.

— Dacă $s_{ij} < 0$, pentru unele celule a_{ij} în care $s_{ij} = 0$, soluția nu este optimă, ea poate fi redusă cu cantitatea αs_{ij}.

Dacă ținem seama de expresia lui s_{ij} și de valorile lui c_{ij} și $\bar{c}_{ij}$ din (12) și (13) se obține:

$$s_{ij} = c_{ij} - c_{ij_1} + c_{i_1j_1} - c_{i_1j_2} + \ldots + c_{i_kj_k} - c_{i_kj} = c_{ij} - (u_i + v_{j_1} - u_{i_1} -$$

$$- v_{j_1} + u_{i_1} + v_{j_2} - \ldots - u_{i_k} - v_{j_k} + u_{i_k} + v_j).$$

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) = c_{ij} - \bar{c}_{ij}.$$

Relația $s_{ij} = c_{ij} - \bar{c}_{ij}$ ne arată că verificarea optimalității se poate face cu ajutorul costurilor c_{ij} și $\bar{c}_{ij}$ calculate în tabela 5.

Concluzie. Verificarea optimalității se face astfel:

Se întocmește tabela 5, calculînd valorile u_i, v_j și costurile $\bar{c}_{ij}$ pentru acele celule în care $x_{ij} = 0$, folosind ecuațiile (12) și (13).

Se compară c_{ij} cu $\bar{c}_{ij}$.

— Dacă $c_{ij} > \bar{c}_{ij}$, pentru celulele în care $x_{ij} = 0$, (19)

$c_{ij} = \bar{c}_{ij}$, pentru celulele în care $x_{ij} > 0$, (20)

soluția este optimă (minimă) și unică.

— Dacă (19) și (20) sînt satisfăcute, dar avem și $c_{ij} = \bar{c}_{ij}$, pentru unele celule în care $x_{ij} = 0$, problema admite o infinitate de soluții minime, care conduc la aceeași valoare minimă a funcției scop.

— Dacă $c_{ij} < \bar{c}_{ij}$, pentru unele celule în care $x_{ij} = 0$, soluția nu este optimă, ea poate fi îmbunătățită (funcția scop se poate reduce).

---

* În general, α poate lua o infinitate de valori cuprinse într-unul din intervalele $[0, x_{31}]$ sau $[0, x_{24}]$ după cum $x_{31} < x_{24} < x_{15}$ sau $x_{24} < x_{15} < x_{31}$.

Scanned with OKEN Scanner

§. 5.2. **Îmbunătățirea soluției.** Dacă pentru o celulă oarecare a_{ij} în care $x_{ij} = 0$, avem $c_{ij} < \bar{c}_{ij}$, atunci evaluarea acelei celule va fi $s_{ij} = c_{ij} - \bar{c}_{ij} < 0$.

Din relația (15) se constată că valoarea inițială a funcției scop se va reduce cu cantitatea αc_{ij}.

Pentru ca reducerea să fie maximă va trebui să luăm pentru α valoarea maximă posibilă, astfel încît în noua soluție valorile x_{ij} să fie nenegative.

În exemplul dat, va trebui să avem satisfăcute condițiile (18).

Pentru aceasta va fi suficient să luăm:

$$\alpha = \min (x_{15},\ x_{31},\ x_{24}).$$

Dacă vom presupune $x_{15} < x_{31} < x_{24}$, atunci $\max \alpha = x_{15}$.

Se constată că *max α este egal minimul valorilor x_{ij} situate în colțurile pare ale ciclului ce corespunde celulei $a_{25} \notin B$, a cărei evaluare $s_{25} < 0$.*

Noua soluție îmbunătățită ce corespunde ciclului $C(2, 5)$, va fi:

$$x'_{25} = x_{15};\ x'_{15} = 0;\ x'_{11} = x_{11} + x_{15};$$

$$x'_{31} = x_{31} - x_{15};\ x'_{34} = x_{34} + x_{15};\ x'_{24} = x_{24} - x_{15}.$$

Această operație constituie un pas (o iterație). După un număr finit de pași (de iterații succesive) se ajunge la soluția optimă, condițiile de optimalitate vor fi satisfăcute.

Exemplu. Să se determine o soluție optimă (minimă) pentru programul de transport din tabela 2, cunoscînd soluția inițială din tabela 6.

Verificarea optimalității. Folosind procedeul indicat se întocmește tabela 7 în modul următor:

1. Se trec costurile c_{ij} ce corespund celulelor în care $x_{ij} > 0$ (în colțul din stînga sus).

Tabela 6

i \ j	1	2	3	4	5	6	a_i
1	68 0	64 31	48 34	24 13	60 0	36 0	68
2	38 0	42 0	44 0	28 19	32 68	34 0	87
3	36 24	46 17	52 0	50 0	40 0	22 14	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

$$f_0 = 8590$$

2. Se determină numerele u_i și v_j ($i = 1, 2, \ldots, 6$; $j = 1, 2, 3$) folosind ecuațiile (12). Pentru a obține pentru u_i și v_j valori unice se consideră $u_1 = 0$, apoi se deduce:

$$v_2 = 64;\ v_3 = 48;\ v_4 = 24;\ u_2 = 28 - 24 = 4;\ v_5 = 32 - 4 = 28;$$

$$u_3 = 46 - 64 = -18;\ v_1 = 36 + 18 = 54;\ v_6 = 22 + 18 = 40.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Folosind relaţiile (13) se calculează costurile $\bar{c}_{ij}$ ce corespund celulelor în care $x_{ij} = 0$ (trecute în colţul din dreapta jos).

4. Se trec apoi şi costurile $\bar{c}_{ij} = c_{ij}$ ce corespund valorilor $x_{ij} > 0$ (tot în colţul din dreapta jos).

Tabela 7

u_i \ v_j	54	64	48	24	28	40
0	68 54	64 64	48 48	24 24	60 28	36 40
4	38 58	42 68	44 52	28 28	32 32	34 44
−18	36 36	46 46	52 30	50 6	40 10	22 22

5. Se compară costurile c_{ij} (scrise în colţul din stînga sus) cu costurile $\bar{c}_{ij}$ (scrise în colţul din dreapta jos). Se constată că soluţia iniţială dată în tabela 6 nu este optimă deoarece în celulele a_{16}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{26} avem:

$$c_{16} < \bar{c}_{16};\ c_{21} < \bar{c}_{21};\ c_{22} < \bar{c}_{22};\ c_{23} < \bar{c}_{23};\ c_{26} < \bar{c}_{26}.$$

Îmbunătăţirea soluţiei. Se cercetează evaluările celor 5 celule în care condiţia de optimalitate nu este satisfăcută şi se calculează produsele $\alpha_{ij}\, s_{ij}$ corespunzătoare acestor celule:

$$s_{16} = 36 - 40 = -4;\ \alpha_{16} = \min\{31, 14\} = 14;\ \alpha_{16}s_{16} = -56;$$

$$s_{21} = 38 - 58 = -20;\ \alpha_{21} = \min\{19, 31, 24\} = 19;\ \alpha_{21}s_{21} = -380;$$

$$s_{22} = 42 - 68 = -26;\ \alpha_{22} = \min\{19, 31\} = 19;\ \alpha_{22}s_{22} = -494;$$

$$s_{23} = 44 - 52 = -8;\ \alpha_{23} = \min\{19, 34\} = 19;\ \alpha_{23}s_{23} = -152;$$

$$s_{26} = 34 - 44 = -10;\ \alpha_{26} = \min\{19, 31, 14\} = 14;\ \alpha_{26}s_{26} = -140.$$

Pentru ca funcţia scop să se reducă cu cantitatea maximă posibilă, va trebui să considerăm ciclul ce corespunde celulei în care $\alpha_{ij}\, s_{ij}$ are valoarea minimă.

Cum:

$$\min_{ij} \alpha_{ij}\, s_{ij} = \min\{-56, -380, -494, -152, -140\} = -494$$

vom îmbunătăţi ciclul ce corespunde celulei a_{22} marcat prin săgeţi în tabela 6. Îmbunătăţirea acestui ciclu ne conduce la soluţia din tabela 8.

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 8

i \ j	1	2	3	4	5	6	a_i
1	68 0	64 12	48 34	24 32	60 0	36 0	78
2	38 0	42 19	44 0	28 0	32 68	34 0	87
3	36 24	46 17	52 0	50 0	40 0	22 14	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

$$f_1 = 8096$$

După primul pas, $f_1 = f_0 + \alpha_{22} s_{22} = 8590 - 494 = 8096$.

Continuînd verificarea optimalității, se constată că soluția obținută după primul pas nu este optimă. Așa cum rezultă din tabela 9, evaluarea celulei a_{16} este negativă: $s_{16} = c_{16} - \bar{c}_{12} = 36 - 40 = -4$.

Tabela 9

u_i \ v_j	54	64	48	24	54	40
0	68 54	64 64	48 48	24 24	60 54	36 40
−22	38 32	42 42	44 26	28 2	32 32	34 18
−18	36 36	46 46	52 30	50 6	40 36	22 22

Îmbunătățind ciclul ce corespunde celulei a_{16}, marcat prin săgeți în tabela 8, se obține soluția din tabela 10.

$$s_{16} = -4\,;\ \alpha_{16} = \min\{12,\ 14\} = 12,\ \alpha_{16} s_{16} = -48.$$

Tabela 10

i \ j	1	2	3	4	5	6	a_i
1	68 0	64 0	48 34	24 32	60 0	36 12	78
2	38 0	42 19	44 0	28 0	32 68	34 0	87
3	36 24	46 29	52 0	50 0	40 0	22 2	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

Scanned with OKEN Scanner

După pasul doi, funcția scop devine:

$$f_2 = f_1 + \alpha_{16} s_{16} = 8096 - 48 = 8048.$$

Verificînd din nou optimalitatea soluției (tabela 11), se constată că:

Tabela 11

u_i \ v_j	50	60	48	24	50	36
0	68 50	64 60	48 48	24 24	60 50	36 36
−18	38 32	42 42	44 30	28 6	32 32	34 18
−14	36 36	46 46	52 34	50 10	40 36	22 22

$c_{ij} > \bar{c}_{ij}$, pentru toate celulele în care $x_{ij} = 0$,
$c_{ij} = \bar{c}_{ij}$, pentru toate celulele în care $x_{ij} > 0$.

Soluția din tabela 10, este deci *optimă* (minimă), *unică* și *nedegenerată* (conține exact $m + n - 1 = 3 + 6 - 1 = 8$ valori $x_{ij} > 0$).

Observații. Pornind de la soluția inițială din tabela 6, soluția optimă a fost obținută după doi pași.

În general, soluția optimă se obține după un număr finit k de pași. După fiecare pas valoarea inițială a funcției scop f_0 va lua valorile $f_1, f_2, \ldots, f_k$, iar în pasul următor $f_{k+1} = f_k$.

Șirul de valori $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_k$, va fi strict descrescător:

$$f_0 > f_1 > f_2 > \ldots > f_k,$$

min $f = f_k$, iar valorile x_{ij}^k corespunzătoare, reprezintă soluția optimă (minimă).

Dacă se cere maximul funcției scop, procedeul este analog.

După r pași se va obține un șir de valori strict crescător:

$$f_0 < f_1 < f_2 < \ldots < f_r.$$

Dacă în pasul următor, $f_{r+1} = f_r$, atunci max $f = f_r$.

Valorile x_{ij}^r corespunzătoare, reprezintă soluția optimă (maximă).

Condițiile ca programul de transport să admită o soluție maximă unică sînt:

$$c_{ij} < \bar{c}_{ij}, \text{ pentru celulele în care } x_{ij} = 0, \tag{21}$$

$$c_{ij} = \bar{c}_{ij}, \text{ pentru celulele în care } x_{ij} > 0. \tag{22}$$

Dacă (21) și (22) sînt satisfăcute, dar avem și $c_{ij} = \bar{c}_{ij}$, pentru unele celule în care $x_{ij} = 0$, programul admite o infinitate de soluții de maxim, care conduc la aceeași valoare maximă a funcției scop.

Dacă avem și $c_{ij} > \bar{c}_{ij}$, pentru unele celule în care $x_{ij} = 0$; soluția nu este maximă, ea poate fi îmbunătățită (funcția scop se poate majora).

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Se cere o soluție optimă (maximă) pentru programul de transport din tabela 2, pornind de la soluția inițială de bază din tabela 3. Folosind metoda distributivă modificată se obține după 4 pași soluția din tabela 12.

Tabela 12

i \ j	1	2	3	4	5	6	a_i
1	68 24	64 0	48 0	24 0	60 54	36 0	78
2	38 0	42 48	44 25	28 0	32 0	34 14	87
3	36 0	46 0	52 9	50 32	40 14	22 0	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

$$f = 68 \cdot 24 + 60 \cdot 54 + \ldots + 50 \cdot 32 + 40 \cdot 14 = 11\,092.$$

Verificînd optimalitatea soluției (tabela 13), se constată că relațiile (21) și (22) sînt satisfăcute, dar avem și $c_{25} = \bar{c}_{25}$ pentru celula a_{25} în care $x_{25} = 0$. Problema admite deci o infinitate de soluții de maxim. Pentru a obține mulțimea acestor soluții, să urmărim ciclul ce corespunde celulei a_{25} (marcat prin săgeți în tabela 12).

Tabela 13

u_i \ v_j	67	70	72	70	60	62
0	68 68	64 70	48 72	24 70	60 60	36 62
−28	38 40	42 42	44 44	28 42	32 32	34 34
−20	36 48	46 50	52 52	50 50	40 40	22 42

Se obține $\alpha = \min\{25, 14\} = 14$. Soluțiile ce corespund acestui ciclu vor fi:

$$x_{25} = \alpha;\ x_{23} = 25 - \alpha;\ x_{33} = 9 + \alpha;\ x_{35} = 14 - \alpha;\ \alpha \in [0, 14]; \quad (23)$$

celelalte valori $x_{ij} > 0$ ce aparțin soluției maxime rămîn neschimbate:

$$x_{11} = 24;\ x_{15} = 54;\ x_{22} = 48;\ x_{34} = 32;\ x_{26} = 14. \quad (24)$$

Mulțimea soluțiilor obținute în (23) și (24) conduc la aceeași valoare maximă a funcției scop: $\max f = 11\,092$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă soluţia unei probleme nu are sens decît în numere întregi (de exemplu x_{ij} reprezintă numărul de transporturi, numărul de piese ce urmează a fi prelucrate pe diferite tipuri de maşini-unelte, numărul de vagoane ce urmează a fi expediate etc.) atunci ea va admite un număr finit de soluţii distincte.

Cum în exemplul dat $\alpha \in [0, 14]$, problema nu va admite decît 15 soluţii distincte, care se vor obţine din (23), pentru $\alpha \in \{0, 1, 2, \ldots, 14\}$. Faptul că o problemă de transport admite o infinitate de soluţii (sau un număr finit în numere întregi), prezintă o importanţă deosebită în practică, deoarece în astfel de cazuri vom putea alege soluţia care convine mai bine situaţiei locale, în momentul executării planului de transport.

§ 6. Probleme de transport neechilibrate

Dacă relaţia:

$$\sum_1^m a_i = \sum_1^n b_j = S$$

este satisfăcută, problema de transport se numeşte echilibrată, în caz contrar se numeşte neechilibrată. În problemele cu caracter aplicativ distingem următoarele cazuri:

§ 6.1. *Suma cantităţilor disponibile este mai mare decît suma cantităţilor necesare:*

$$\sum_1^m a_i > \sum_1^n b_j. \tag{27}$$

Pentru ca problema să se poată rezolva ea trebuie să fie echilibrată. În acest scop se introduce un centru de consum fictiv B_{n+1}, căruia îi vom trimite cantitatea:

$$b_{n+1} = \sum_1^m a_i - \sum_1^n b_j > 0. \tag{28}$$

Centrul de consum B_{n+1} fiind fictiv, cantitatea b_{n+1} va trebui să rămînă în centrele de expediţie A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Pentru ca această condiţie să fie satisfăcută se consideră toate distanţele de transport de la A_i la B_{n+1} egale cu zero:

$$d_{1,n+1} = d_{2,n+1} = \ldots = d_{m,n+1} = 0.$$

Se obţine astfel un model echilibrat, deoarece în baza relaţiei (28) avem satisfăcută condiţia:

$$\sum_1^m a_i = \sum_1^{n+1} b_j = S.$$

Soluţia optimă a acestui model ne va permite să determinăm atît cantităţile ce vor fi transportate din A_i în B_j, cît şi cantităţile ce vor rămîne disponibile în A_i.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Din 4 staţii de cale ferată A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ se trimit lemne de foc în 6 localităţi, B_j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$.

Distanţele d_{ij} (în km) de la staţia A_i la localitatea B_j, cantităţile de lemne a_i (în tone) disponibile în staţiile A_i, precum şi cantităţile b_j necesare localităţilor B_j sînt date în tabela 21.

Tabela 21

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	140	150	200	100	160	240	46
A_2	160	100	140	150	120	220	50
A_3	200	120	240	140	130	100	48
A_4	80	180	170	120	200	160	30
b_j	24	30	18	40	16	32	174 / 160

Se cere să se organizeze un plan de transport care să se realizeze cu un minim de tone km.

Soluţie. Deoarece modelul este neechilibrat:

$$\sum_1^4 a_i > \sum_1^6 b_j,$$

vom introduce localitatea fictivă B_7, căreia îi vom repartiza diferenţa:

$$b_7 = \sum_1^4 a_i - \sum_1^6 b_j = 174 - 160 = 14,$$

şi vom considera:

$$d_{17} = d_{27} = d_{37} = d_{47} = 0.$$

Se obţine astfel modelul echilibrat din tabela 22, în care avem satisfăcută condiţia:

$$\sum_1^4 a_i = \sum_1^7 b_j = 174.$$

Tabela 22

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	a_i
1	140	150	200	100	160	240	0	46
2	160	100	140	150	120	220	0	50
3	200	120	240	140	130	100	0	48
4	80	180	170	120	200	160	0	30
b_j	24	30	18	40	16	32	14	174

Scanned with OKEN Scanner

Folosind metoda *elementului minim pe coloană*, se obține soluția inițială de bază din tabela 23:

Tabela 23

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	a_i
1	140 0	150 0	200 0	100 40	160 0	240 0	0 6	46
2	160 0	100 30	140 18	150 0	120 2	220 0	0 0	50
3	200 0	120 0	240 0	140 0	130 14	100 32	0 2	48
4	80 24	180 0	170 0	120 0	200 0	160 0	0 6	30
b_j	24	30	18	40	16	32	14	174

Verificînd optimalitatea acestei soluții prin *metoda distributivă modificată*, se constată că ea este minimă, unică și nedegenerată (conține exact $m + n - 1 = 4 + 7 - 1 = 10$ valori $x_{ij} > 0$).

Soluția optimă ne arată că planul de transport se va realiza cu un $\min f = 16\,700$ tone km, iar în stațiile A_1, A_3 și A_4, vor rămîne disponibile cantitățile: 6, 2, respectiv 6 tone lemne (coloana 7, tabela 23).

§.6.2. *Suma cantităților disponibile este mai mică decît suma cantităților necesare:*

$$\sum_1^m a_i < \sum_1^n b_j. \tag{29}$$

Pentru a obține o problemă de transport echilibrată se introduce un centru de expediție fictiv A_{m+1}, care va expedia centrelor de consum B_j cantitatea:

$$a_{m+1} = \sum_1^m b_j - \sum_1^n a_i > 0. \tag{30}$$

Întrucît această cantitate nu poate fi transportată, deoarece ea nu există, vom considera distanțele de transport de la A_{m+1} la B_j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ egale cu zero:

$$d_{m+1,1} = d_{m+1,2} = \ldots = d_{m+1,n} = 0.$$

Se obține astfel un model de transport echilibrat, deoarece vom avea satisfăcută condiția:

$$\sum_1^{m+1} a_i = \sum_1^n b_j = S.$$

Necesarul centrelor de consum nu va putea fi satisfăcut în întregime. Soluția optimă ne va arăta care sînt cantitățile x_{ij} ce vor trebui trimise din A_i în B_j $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ cît și cantitățile $x_{m+1,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ce mai sînt necesare centrelor de consum B_j pentru a fi satisfăcute conform planului inițial propus.

Scanned with OKEN Scanner

Evident că în astfel de condiții, o parte din centrele B_j vor trebui să primească cantitatea a_{m+1} de la alte centre de producție.

Exemplu. *Amenajarea unui teren plan.* În scopul realizării unui teren plan necesar unui șantier de construcții, urmează a se întocmi un plan optim de repartiție a pământului scos din profilurile de săpătură (debleuri) pentru a fi trimis în punctele unde există profiluri de umplutură (rambleuri).

Cantitățile de pământ d_i (în tone) ce urmează a fi obținute din profilurile de săpătură, cele necesare profilurilor de umplutură r_j, precum și distanțele d_{ij} (în sute metri) de la D_i la R_j sînt date în tabela 24.

Tabela 24

D_i \ R_j	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	d_i
D_1	12	16	13	15	20	22	62
D_2	14	10	16	22	25	14	50
D_3	24	26	15	28	30	18	32
D_4	15	20	19	24	18	15	66
r_j	28	36	42	48	30	50	210 \ 234

Se cere să se determine un plan de repartiție a pământului care să conducă la un minim de tone km.

Soluție. Se constată că modelul de transport este neechilibrat, deoarece:

$$\sum_1^4 d_i < \sum_1^6 r_j.$$

Vom introduce deci un profil de săpătură fictiv, D_5, din care vom transporta în R_j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ o cantitate de pământ egală cu:

$$d_5 = \sum_1^6 r_j - \sum_1^4 d_i = 234 - 210 = 24.$$

Cum această cantitate de pământ nu există pe suprafața terenului care trebuie amenajat, vom lua:

$$d_{51} = d_{52} = d_{53} = d_{54} = d_{55} = d_{56} = 0.$$

Se obține astfel modelul echilibrat din tabela 25, în care avem satisfăcută condiția:

$$\sum_1^5 d_i = \sum_1^6 r_j = 234.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 25

i \ j	1	2	3	4	5	6	d_i
1	12	16	13	15	20	22	62
2	14	10	16	22	25	14	50
3	24	26	15	28	30	18	32
4	15	20	19	24	18	15	66
5	0	0	0	0	0	0	24
r_j	28	36	42	48	30	50	234

Folosind metoda distributivă modificată se obține soluția optimă (minimă) din tabela 26.

Tabela 26

i \ j	1	2	3	4	5	6	d_i
1	4	0	10	48	0	0	62
2	0	36	0	0	0	14	50
3	0	0	32	0	0	0	32
4	24	0	0	0	6	36	66
5	0	0	0	0	24	0	24
r_j	28	36	42	48	30	50	234

Verificînd optimalitatea soluției (tabela 27) se constată că avem și evaluări $s_{ij} = 0$, pentru unele celule în care $x_{ij} = 0$.

Tabela 27

u_i \ v_j	12	8	13	15	15	12
0	0	8	0	0	5	10
2	0	0	1	5	8	0
2	10	16	0	11	13	4
3	0	9	3	6	0	0
−15	3	7	2	0	0	3

Scanned with OKEN Scanner

Astfel : $s_{21} = s_{54} = 0$; în celulele în care $x_{21} = x_{54} = 0$.

Problema admite deci o dublă infinitate de soluţii, cîte o infinitate de soluţii pentru fiecare din valorile x_{ij} ce compun cele două cicluri ce corespund celulelor a_{21} şi a_{54} (marcate prin săgeţi în tabela 26).

Dacă vom presupune că x_{ij} reprezintă numărul de transporturi auto de la D_i la R_j, problema nu poate admite decît soluţii în numere întregi. Pentru ciclul ce corespunde celulei a_{54}, aceste soluţii sînt[1] :

$$x_{54} = \alpha\,;\ x_{14} = 48 - \alpha\,;\ x_{11} = 4 + \alpha\,;\ x_{41} = 24 - \alpha\,;$$

$$x_{45} = 6 + \alpha\,;\ x_{55} = 24 - \alpha\,;\ \alpha \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 24\}.$$

Vom avea numai 25 soluţii în numere întregi. Se constată că în R_5 vor fi trimise numai 6 tone de pămînt în loc de 30 cît era nevoie. Diferenţa de 24 tone va fi adusă din punctul cel mai apropiat de R_5, situat în afara terenului ce trebuie amenajat.

În aceste condiţiuni min $f = 294\,200$ tone metri.

Concluzie. Problema admite o dublă infinitate de soluţii (sau un număr finit în numere întregi), care conduc la aceeaşi valoare minimă a funcţiei scop : min $f = 294{,}2$ tone km.

Probleme propuse

1. Trei fabrici de zahăr trimit produsul lor în 6 localităţi. Cantităţile a_i (în tone) disponibile la cele 3 fabrici A_i, cantităţile b_j necesare celor 6 localităţi B_j, precum şi costul transportului c_{ij} (lei/tonă) pe distanţa A_iB_j, sînt date în tabela de mai jos :

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	120	50	90	200	40	70	400
A_2	100	220	260	50	110	200	600
A_3	160	180	100	240	280	60	800
b_j	350	150	250	280	320	450	1800

Se cere să se determine cantităţile x_{ij} (tone), care trebuie trimise de la cele 3 fabrici la cele 6 localităţi, astfel încît planul de transport să se realizeze cu un minim de cheltuieli.

R : Problema admite o infinitate de soluţii optime (minime) :

$$x_{24} = 280\,;\ x_{32} = \alpha\,;\ x_{12} = 150 - \alpha\,;\ x_{15} = 250 + \alpha\,;\ x_{33} = 250\,;$$

$$x_{25} = 70 - \alpha\,;\ x_{21} = 250 + \alpha\,;\ x_{31} = 100 - \alpha\,;\ x_{36} = 450\,;$$

unde $\alpha \in [0,\ 70]$; celelalte valori x_{ij} fiind egale cu zero.

Toate aceste soluţii conduc la aceeaşi valoare minimă a funcţiei scop : min $f = 132\,200$ lei.

---

[1] Pentru ciclul a_{31} se obţin numai 15 soluţii în numere întregi : $x_{31} = \beta\,;\ x_{41} = 24 - \beta\,;$ $x_{44} = 36 + \beta\,;\ x_{36} = 14 - \beta\,;\ \beta \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 14\}$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Din 4 centre de cale ferată A_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ se trimit vagoane goale în 3 staţii B_j, $(j = 1, 2, 3)$.

Numărul vagoanelor goale (a_i) disponibile în centrele A_i, al celor necesare (b_j), în staţiile B_j, precum şi costul c_{ij} al transportului unui vagon din A_i în B_j (exprimat în lei/vagon) sînt date în tabela de mai jos.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	13	10	5	250
A_2	8	10	12	750
A_3	23	7	12	500
A_4	20	15	10	250
b_j	100	750	900	1750

Se cere să se determine numărul (x_{ij}) de vagoane goale care trebuie trimise din centrele A_i în staţiile B_j, astfel încît totalul cheltuielilor de transport să fie minim.

R: Se obţine soluţia unică şi nedegenerată:

$x_{13} = 250$; $x_{21} = 100$; $x_{22} = 250$; $x_{23} = 400$; $x_{32} = 500$; $x_{43} = 250$;

celelalte valori x_{ij} fiind nule; min $f = 15\,350$ lei.

3. Să se determine un plan de transport care să se realizeze cu un total minim de tone · km, folosind datele din tabela de mai jos:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	28	42	75	36	33	605
A_2	24	36	28	72	54	245
A_3	14	27	35	40	45	650
b_j	220	440	410	230	150	1500 / 1450

în care a_i reprezintă cantităţile de marfă (tone) disponibile la cele 3 depozite A_i, $(i = 1, 2, 3)$; b_j, cantităţile de marfă necesare celor 5 centre de consum B_j, $(j = 1, 2, \ldots, 5)$. Numerele scrise în chenar reprezintă distanţele (în km) de la depozitul A_i la centrul B_j.

R: Se va introduce un centru de consum fictiv B_6, unde vom trimite diferenţa $b_6 = 1\,500 - 1\,450 = 50$ tone. Soluţia optimă (minimă) este: $x_{11} = 175$; $x_{14} = 230$; $x_{15} = 150$; $x_{16} = 50$; $x_{23} = 245$; $x_{31} = 45$; $x_{32} = 440$; $x_{33} = 165$; celelalte valori x_{ij} fiind nule. În depozitul A_1 va rămîne un disponibil de 50 tone $(x_{16} = 50)$. min $f = 43\,275$ tone. km.

4. Folosind datele din problema 3, să se determine un plan de transport astfel încît:

— Centrul B_3 să primească cantitatea de 410 t numai de la depozitele A_1 şi A_2.

Scanned with OKEN Scanner

— Centrul B_4 să primească cantitatea de 230 t numai de la depozitele A_2 și A_3.

— Diferența $b_6 = 50$ t să rămînă disponibilă în depozitul A_3.

Indicație. Restricțiile impuse vor fi satisfăcute dacă vom pune:

$$d_{33} = d_{14} = d_{16} = d_{26} = N = 1\,000.$$

Se va obține modelul obișnuit al unei probleme de transport:

i \ j	1	2	3	4	5	6	a_i
1	28	42	75	N	33	N	605
2	24	36	28	72	54	N	245
3	14	27	N	40	45	0	650
b_j	220	440	410	230	150	50	1500

Rutele ce corespund celulelor pentru care $d_{ij} = N$ nu vor fi utilizate deoarece distanțele pe aceste rute sînt foarte mari în raport cu cele existente.

Se obține soluția:

$x_{11} = 220$; $x_{12} = 70$; $x_{13} = 165$; $x_{15} = 150$; $x_{23} = 245$; $x_{32} = 370$; $x_{34} = 230$; $x_{36} = 50$; celelalte valori x_{ij} fiind nule.

$\min f = 52\,475$ tone·km și reprezintă o majorare de 9 200 tone·km față de soluția obținută în problema 3, cînd toate rutele puteau fi utilizate.

5. Se dă problema de transport din tabela de mai jos:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	16	15	10	21	21	21	25
A_2	23	21	17	14	27	22	26
A_3	26	26	19	26	16	24	30
A_4	20	22	16	24	27	19	28
b_j	20	19	19	16	17	19	109

în care: a_i reprezintă numărul de autocamioane disponibile la autobuzele A_i ($i = 1, 2, 3, 4$); b_j, numărul de autocamioane necesare centrelor B_j, ($j = 1, 2, \ldots, 6$), numerele scrise în chenar, reprezintă timpul t_{ij} (exprimat în ore), necesar unui autocamion pentru a parcurge distanța de la A_i la B_j.

Se cere să se determine un plan de transport care să se realizeze:

— cu un total minim de moto-ore;

— cu un total maxim de moto-ore.

Indicație. Se va folosi metoda distributivă modificată.

Scanned with OKEN Scanner

Se obţin o infinitate de soluţii optime (minime):

$$x_{11} = 11 - \alpha;\ x_{12} = 8;\ x_{13} = 6 + \alpha;\ x_{21} = 10;\ x_{24} = 16;\ x_{33} = 13 - \alpha;$$

$$x_{35} = 17;\ x_{36} = \alpha;\ x_{41} = 9 + \alpha;\ x_{46} = 19 - \alpha;\ \alpha \in [0,\ 11].$$

min $f = 1\,850$ moto-ore.

Folosind acelaşi procedeu se obţin o infinitate de soluţii optime (maxime):

$$x_{14} = 16;\ x_{16} = 9;\ x_{21} = 8 - \alpha;\ x_{23} = 8 + \alpha;\ x_{26} = 10;\ x_{31} = 12 + \alpha;$$

$$x_{32} = 18 - \alpha;\ x_{42} = \alpha;\ x_{43} = 11 - \alpha;\ x_{45} = 17;\ \alpha \in [0,\ 8].$$

max $f = 2\,435$ moto-ore.

6. Fie a_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ capacitatea de prelucrare a maşinii M_i, exprimată prin numărul de piese prelucrate pe zi; b_j, $(j = 1, 2, \ldots, 8)$ capacitatea planificată pentru piesele de tipul P_j, exprimată prin numărul de piese ce urmează a fi prelucrate la cele 4 maşini în unitatea de timp (pe zi); c_{ij}, cheltuielile de producţie pentru prelucrarea unei piese de tipul j, la maşina-unealtă i.

Folosind datele din tabela de mai jos, se cere să se determine numărul (x_{ij}) de piese de tipul j ce urmează a fi prelucrate la maşina i, astfel încît totalul cheltuielilor pentru realizarea planului de producţie să fie minim.

Problemele de acest fel, cunoscute sub numele de *„repartiţia optimă a pieselor pe maşini-unelte”*, conduc la un model obişnuit al unei probleme de transport.

P_j / M_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	a_i
M_1	1,5	2	2,4	0,8	0	0,5	1,1	3	62
M_2	0	2,2	1	1,6	0,9	2	2,5	1	40
M_3	1,2	2,8	0	1,9	3,5	0	1,3	2	51
M_4	1,4	1,1	3,2	0	2,6	1,7	2,5	1,8	47
b_j	12	20	18	24	10	35	8	40	200 / 167

Indicaţii. Se constată că unele piese nu necesită prelucrarea la toate maşinile. Pentru ca acestor maşini să nu li se repartizeze nici o piesă din cele care nu cer nici o prelucrare la ele, vom considera costurile c_{ij} corespunzătoare foarte mari în raport cu cele existente.

Vom lua: $c_{15} = c_{21} = c_{33} = c_{36} = c_{44} = N = 100$.

Problema fiind neechilibrată, vom introduce o categorie de piese, fictivă, de tipul P_9, care va conţine: $b_9 = 200 - 167 = 33$ piese, şi vom considera costurile c_{ij} corespunzătoare egale cu zero; $c_{19} = c_{29} = c_{39} = c_{49} = 0$. Folosind metoda distributivă modificată se obţine soluţia

optimă (minimă), unică și nedegenerată din tabela de mai jos, din care rezultă min $f = 172{,}50$.

M_i \ P_j	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	a_i
M_1				24		35	3			62
M_2			18		10			12		40
M_3	12						5	1	33	51
M_4		20						27		47
b_j	12	20	18	24	10	35	8	40	33	200

Planul de producție se va realiza cu un total minim de 172,50 lei/zi, iar mașina M_3 va lucra sub capacitatea sa maximă (va prelucra 33 piese mai puțin).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XI

GRAFURI

Definiţii. Fie $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o mulţime finită de puncte pe care le unim după un anumit criteriu.

În acest mod se va obţine o corespondenţă dintre elementele mulţimii X. Legea care stabileşte această corespondenţă o vom nota cu Γ. Prin legea Γ fiecărui element al mulţimii X îi corespunde unul, nici unul sau mai multe elemente ale aceleiaşi mulţimi.

Graful se poate defini ca o aplicaţie multivocă a unei mulţimi pe ea însăşi.

Un graf G este definit dacă se cunoaşte mulţimea vîrfurilor X şi legea Γ de corespondenţă dintre aceste vîrfuri. Vom nota $G = (X, \Gamma)$.

Segmentele orientate care unesc între ele două vîrfuri se numesc *arce*. Dacă notăm cu U mulţimea arcelor dintr-un graf, atunci von nota $G = (X, U)$. Dacă mulţimea X are n elemente, graful G este de ordinul n şi va conţine n vîrfuri.

Un graf poate fi definit deci ca un sistem format dintr-o mulţime X de elemente x_i, numite vîrfurile grafului şi de o mulţime U de perechi ordonate (x_i, x_j), numite arcele grafului.

Prin grafuri pot fi reprezentate şi studiate o serie de probleme din cele mai diferite domenii de activitate: organizarea circulaţiei într-un oraş; o reţea de comunicaţii în care vîrfurile reprezintă localităţile, posturi telefonice, posturi de radio emisie şi recepţie; circulaţia informaţiilor într-un sistem; operaţiile de montare sau demontare a unui ansamblu tehnologic; reţeaua staţiilor releu de televiziune; relaţiile de rudenie ale unui grup de indivizi (arbore genealogic); fluxul tehnologic al unei întreprinderi etc.

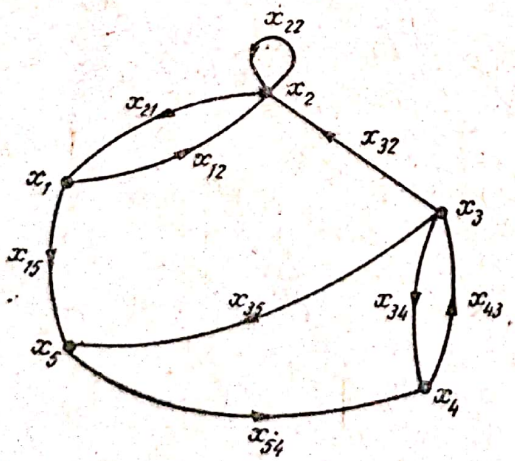


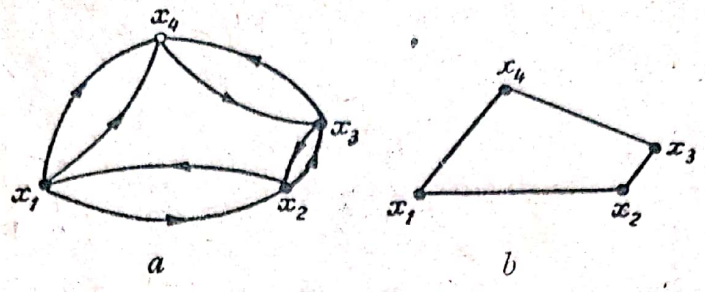
Fig. 159.

Principalele concepte folosite în teoria grafurilor sînt:

§ 1. Concepte legate de orientare

Drum. O succesiune de arce adiacente care permit trecerea de la un vîrf la altul de-a lungul arcelor. În graful din figura 159 arcele (x_1, x_5), (x_5, x_4), (x_4, x_3) formează un drum care uneşte vîrful x_1 cu x_3. Un drum se poate descrie şi prin vîrfurile care le conţine, exemplu (x_1, x_5, x_4, x_3).

Scanned with OKEN Scanner



a *b*

Fig. 160.

Circuit. Un drum în care vîrful inițial coincide cu vîrful final. În figura 159, arcele (x_5, x_4), (x_4, x_3), (x_3, x_5) formează un circuit, care se poate nota prin vîrfurile lui (x_5, x_4, x_3, x_5).

Lungimea unui drum (sau a unui circuit) este dat de numărul arcelor ce compun acel drum (sau circuit).

Drumul (x_1, x_5, x_4, x_3) din figura 159 are lungimea 3, iar circuitul $(x_1, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ are lungimea 5 (este format din 5 arce).

Buclă. Un circuit de lungime 1. Exemplu, bucla (x_2, x_2) din figura 159.

Graf simetric. Un graf $G = (X, U)$ este simetric dacă:

$$\forall x_i, x_j \in X;\ (x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U.$$

Cu alte cuvinte, dacă x_i este legat de x_j și x_j trebuie să fie legat de x_i, pentru toate vîrfurile între care există o corespondență. Exemplu, graful din figura 160*a* este simetric. În multe cazuri, pentru simplificare, arcele simetrice se înlocuiesc prin linii fără săgeți (graful din figura 160*b*).

Graf antisimetric. Un graf $G = (X, U)$ este antisimetric dacă:

$$\forall x_i, x_j \in X;\ (x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \notin U.$$

Cu alte cuvinte, între orice pereche de vîrfuri nu poate exista decît un singur arc. Rezultă că un graf antisimetric nu poate conține bucle. Exemplu, graful din figura 161*a*.

Graf tare conex. Un graf în care:

$$\forall x_i, x_j \in X;\ x_i \neq x_j$$

există cel puțin un drum de la vîrful x_i la vîrful x_j.

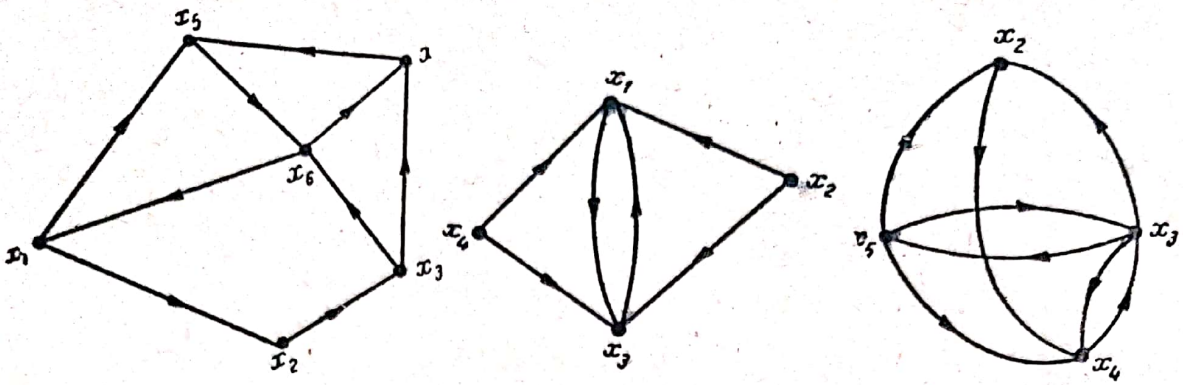
Graful din figura 160*b* este tare conex, dar graful din figura 161*b* nu, deoarece x_1 nu se poate lega cu x_2 și nici cu x_4.

§ 2. Concepte legate de neorientare

Muchie. O muchie într-un graf este formată dintr-o pereche de vîrfuri (x_i, x_j), astfel încît dacă $(x_i, x_j) \in U$, atunci și (sau) $(x_j, x_i) \in U$; unde $x_i \neq x_j$. Cu alte cuvinte, o muchie este o pereche de vîrfuri legate printr-un arc într-un sens sau altul, sau prin două arce de sensuri opuse.

O muchie se notează, de obicei, prin $\bar{u} = [x_i, x_j]$, iar mulțimea tuturor muchiilor, prin $\bar{U}$. Graful din figura 160*a* are 8 arce, dar numai 4 muchii, iar cel din figura 161*a* are 9 arce și 9 muchii.

Scanned with OKEN Scanner



a *b* *c*

Fig. 161.

Lanţ. O succesiune de muchii $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_i)$, astfel încît fiecare muchie $\bar{u}_p$ este legată de precedenta $\bar{u}_{p-1}$ printr-o extremitate şi de $\bar{u}_{p+1}$ prin cealaltă extremitate $(p = 2, \ldots, i-1)$.

Un lanţ se notează prin vîrfurile ce le conţine. Lanţul este simplu dacă muchiile ce-l compun sînt diferite şi este compus în caz contrar. În graful din figura 159 $[x_1, x_2, x_3]$, $[x_1, x_5, x_4, x_3)$ sînt lanţuri simple, iar $[x_5, x_3, x_2, x_1, x_5, x_3, x_2]$ este un lanţ compus.

Un lanţ se numeşte elementar dacă nu întîlneşte de două ori un acelaşi vîrf. În graful din figura 161 *b* $[x_1, x_2, x_3)$ este un lanţ elementar.

Ciclu. Un lanţ care pleacă dintr-un vîrf x_i şi ajunge în acelaşi vîrf se numeşte ciclu. În graful din figura 159, $[x_5, x_4, x_3, x_5]$, $[x_2, x_1, x_5, x_3, x_4 x_3, x_2]$ sînt cicluri.

Un ciclu este elementar dacă fiecare vîrf ce aparţine ciclului este întîlnit o singură dată, cu excepţia vîrfului iniţial care coincide cu vîrful final. În graful din figura 161*b*, $[x_1, x_2, x_3, x_1]$ este un ciclu elementar.

Graf conex. Dacă $\forall x_i$ şi $\forall x_j$; $x_i \neq x_j$ există un lanţ care uneşte pe x_i cu x_j. Un graf este deci conex dacă există un lanţ între două vîrfuri distincte, oricare ar fi ele.

Graful din figura 161*a* este conex, dar nu este tare conex. Un graf tare conex este şi conex. Reciproca nu este însă adevărată.

§ 3. Tipuri de grafuri

Graf complet. Într-un graf complet, oricare două vîrfuri x_i, x_j sînt legate prin arce fie într-un sens (de la x_i la x_j) fie în sens invers (de la x_j la x_i), fie în ambele sensuri:

$$\forall\, x_i,\ x_j \in X \text{ cu } i \neq j;\ (x_i,\ x_j) \notin U \Rightarrow (x_j,\ x_i) \in U.$$

Exemplu, graful din figura 161*c* este complet.

Graf parţial. Un graf parţial al unui graf dat $G = (X, U)$ este un graf $G_1 = (X, U_1)$ cu $U_1 \in U$. Exemplu, graful din figura 162 este un graf parţial al grafului din figura 161*c* obţinut prin suprimarea arcelor $[x_1, x_3]$, $[x_1, x_4]$, $[x_3, x_4]$.

Scanned with OKEN Scanner

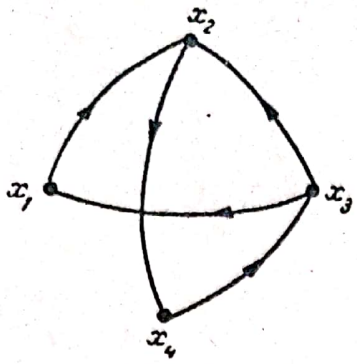


Fig. 162.

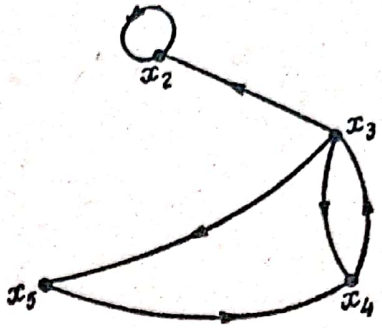


Fig. 163.

Subgraf. Dacă într-un graf G se suprimă unul sau mai multe vîrfuri, precum şi arcele care le sînt adiacente se obţine un subgraf G'. Un subgraf al lui $G = (X, \Gamma)$ este prin definiţie un graf (A, Γ_A) în care:

$$A \subset X \quad \text{şi} \quad \forall x_i \in A, \qquad \Gamma_A x_i = \Gamma x_i \cap A.$$

În figura 163 se poate vedea un subgraf al grafului din figura 159 în care a fost suprimat vîrful x_1 şi arcele adiacente (x_1, x_5), (x_1, x_2), (x_2, x_1).

Graf simplu. Dacă mulţimea X a vîrfurilor unui graf se compune din două mulţimi disjuncte X_1 şi $X_2 (X = X_1 \cup X_2;\ X_1 \cap X_2 = \emptyset)$, graful $G = (X_1, X_2, U)$ se numeşte graf simplu dacă:

$$(x_i, x_j) \in U \Rightarrow x_i \in X_1;\ x_j \in X_2.$$

Un graf simplu se poate vedea în figura 164 în care:

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\};\quad X_2 = \{x_5, x_6, x_7\}.$$

Graf total. Un graf $G = (X, \Gamma)$ este total dacă $\forall x_i, x_j \in X$ există un drum de la x_i spre x_j şi (sau) de la x_j la x_i.

Un graf tare conex este un graf total. Graful din figura 161*a* este un graf total. Diferenţa dintre un graf tare conex şi un graf total este urmă-

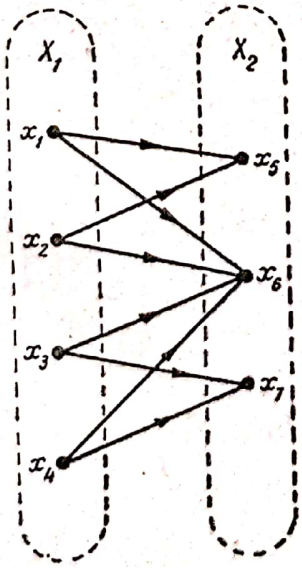


Fig. 164.

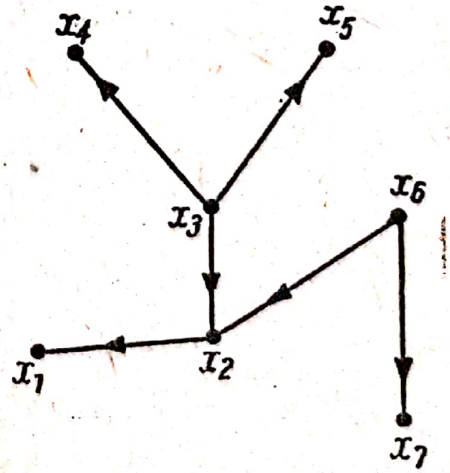


Fig. 165.

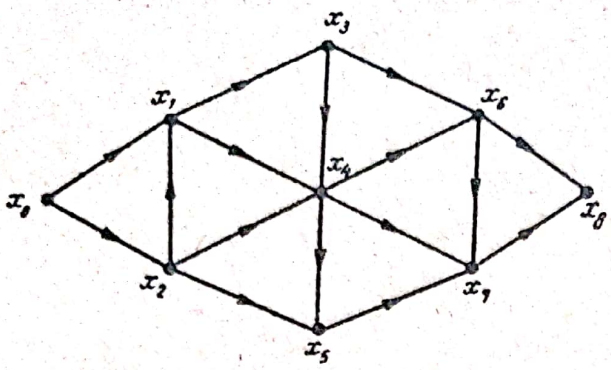


Fig. 166.

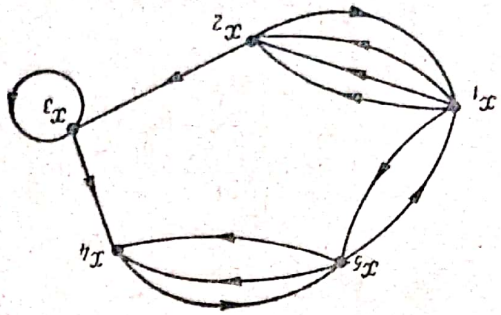


Fig. 167.

toarea : în graful tare conex $\forall x_i, x_j \in X$ există un drum de la x_i la x_j, în graful total $\forall x_i, x_j \in X$ există un drum de la x_i la x_j și (sau) de la x_j la x_i.

Arbore. Un graf conex care nu conține nici un ciclu se numește arbore. Un arbore este un arbore parțial al unui graf dat, dacă el constituie un graf parțial care nu are nici un ciclu. Din definiție rezultă că arborii nu sînt legați de conceptul de orientare.

Într-un arbore orice pereche de vîrfuri este legată printr-un singur lanț și numai unul. Vîrfurile în care există o singură muchie incidentă se numesc vîrfuri terminale.

În figura 165 se poate vedea un graf care conține 4 vîrfuri terminale : x_1, x_4, x_5, x_7.

Multigraf. Un graf în care cel puțin două vîrfuri sînt legate prin mai multe muchii distincte între ele se numește multigraf. Dacă p este cel mai mare număr de muchii care leagă între ele două vîrfuri, multigraful se numește p-graf.

În figura 167 se poate vedea un 4-graf ; vîrfurile x_1 și x_2 sînt legate prin 4 muchii.

Matricea asociată unui graf. Unui graf de ordinul n, i se poate asocia o matrice pătrată (a_{ij}) de ordinul n definită astfel :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } (x_i, x_j) \in U \\ 0, \text{ dacă } (x_i, x_j) \notin U. \end{cases}$$

Această matrice definește complet graful și deoarece elementele ei $a_{ij} \in \{0, 1\}$, poartă numele de *matrice booleană*. Exemplu. Matricea asociată grafului din figura 159 este :

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 4. Drumul cel mai scurt într-un graf

Fie x_i și x_j două vîrfuri ale unui graf $G = (X, \Gamma)$. Numim *depărtarea* de la x_i la x_j și o notăm $d(x_i, x_j)$, numărul de arce ale unui drum de lungime minimă de la x_i la x_j (prin lungime se înțelege numărul de arce care formează drumul).

Drumul cel mai scurt dintre două vîrfuri corespunde depărtării dintre acele două vîrfuri.

Pentru a obține *depărtarea* dintre două vîrfuri se poate folosi următorul algoritm care se bazează pe principiul: „un drum de lungime minimă nu poate fi format decît din drumuri parțiale de lungime minimă". Se atribuie fiecărui vîrf x_i începînd cu originea drumului un număr egal cu depărtarea de la acel vîrf la origine (x_0). Marcarea se face succesiv pînă la vîrful care reprezintă extremitatea finală (z) a drumului.

Dacă numărul atribuit acestei extremități este r, atunci $d(x_0, z) = r$. Să urmărim determinarea drumului de lungime minimă pe graful din figura 168.

Se dă lui x_0 cota 0, apoi se dă cota 1 tuturor vîrfurilor adiacente spre exterior vîrfului x_0. Se obțin 3 vîrfuri marcate cu 1. În continuare, se atribuie cota 2 vîrfurilor adiacente spre exterior vîrfurilor marcate cu 1. Se obțin 4 vîrfuri notate cu 2. Apoi se atribuie cota 3 vîrfurilor adiacente spre exterior vîrfurilor notate cu 2. Se obțin 3 vîrfuri notate cu 3. Procedeul se repetă pînă cînd vîrful z devine marcat. Cum în exemplul dat z este marcat cu 5 rezultă că $d(x_0, z) = 5$.

Observații

— Pentru a găsi depărtarea $d(z, x_0)$ dintre vîrfurile z și x_0 se procedează în același mod, cu deosebirea că marcarea începe de la vîrful z. În general, $d(x_0, z) \neq d(z, x_0)$.

În exemplul dat $d(z, x_0) = 6$ și poate fi urmărită în figura 169.

— În grafele simetrice $d(x_0, z) = d(z, x_0)$, deoarece în acest caz:

$$(x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U; \quad \forall x_i, x_j \in G.$$

— În unele cazuri problema poate admite două sau mai multe soluții. În exemplul din figura 169 avem două drumuri de lungime minimă:

$$d(z, x_0) = (z, 1, 2, 3', 4', 5', x_0) = 6,$$

marcat prin săgeți groase și:

$$d(z, x_0) = (z, 1, 2, 3', 4'', 5'', x_0) = 6,$$

în care primele 3 arce coincid, iar ultimele 3 marcate punctat sînt diferite.

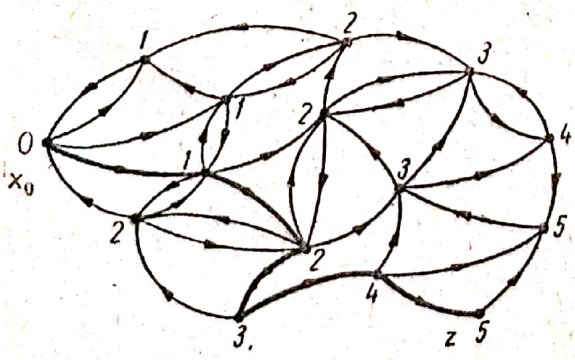


Fig. 168.

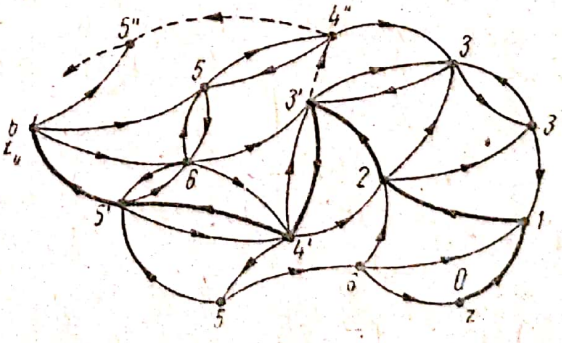


Fig. 169.

§ 5. Drumul de valoare minimă într-un graf

Fie $G = (X, U)$ un graf. Fiecărui arc $u \in U$ îi asociem un număr $l(u) \geqslant 0$ numit valoarea lui u. Aceste valori pot reprezenta costuri, distanţe, timp, capacităţi, greutăţi, productivitate, probabilitate etc., pentru $l(x_i, x_j)$ se poate folosi notaţia a_{ij}.

Se pune problema de a determina un drum μ ce pleacă de la un vîrf $x_0 \in X$ la un vîrf $x_n \in X$ astfel încît suma:

$$l(\mu) = \sum_{u \in \mu} l(u) \quad \text{să fie minimă.}$$

Aceasta înseamnă a găsi un drum de *valoare minimă* între două vîrfuri ale unui graf.

Într-o anumită problemă se poate cere să se determine traseul ce trebuie parcurs de un autovehicul care plecînd din x_0 trebuie să ajungă în x_n într-un timp minim. În acest caz valoarea arcului (x_i, x_j) se va nota t_{ij} şi va reprezenta timpul de tranzit de la vîrful x_i la vîrful x_j.

Dacă urmărim minimizarea costului de transport se va folosi notaţia c_{ij}; costul transportului pe distanţa (x_i, x_j).

În astfel de cazuri, soluţia optimă ne va permite să determinăm un drum (sau mai multe), care plecînd din x_0 să ajungă în x_n într-un timp total minim (sau cu un total minim de cheltuieli).

Algoritmul Bellman-Kalaba. Acest algoritm se bazează pe principiul optimalităţii cunoscut din programarea dinamică: „orice politică optimală nu poate fi formată decît din subpolitici optimale".

Aplicat la teoria grafelor, acest principiu se enunţă astfel. *Orice drum minim este format numai din drumuri parţiale minime.*

Vom folosi notaţia:

c_{ij}, valoarea asociată arcului (x_i, x_j) ce aparţine grafului $G = (X, U)$, definită astfel:

$$c_{ij} = \begin{cases} l(x_i, x_j), \text{ dacă } (x_i, x_j) \in U \\ 0, \text{ dacă } (x_i, x_i) \in U \\ \infty \text{ dacă } (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

Cu această notaţie, găsirea drumului minim

$$\mu = [x_0, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_n]$$

revine la determinarea minimului sumei:

$$c_{0i_1} + c_{i_1 i_2} + c_{i_2 i_3} + \ldots + c_{i_k n}. \tag{1}$$

Fie acum v_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, valoarea drumului minim de la vîrful x_i la vîrful final. Dacă vom presupune că graful are $n+1$ vîrfuri, atunci vîrful iniţial se notează cu x_0, iar vîrful final cu x_n.

Pentru a găsi valorile v_i ale drumurilor minime de la vîrful x_i la vîrful x_n $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, va trebui să rezolvăm sistemul de ecuaţii:

$$v_i = \min_{j \neq i} (v_j + c_{ij}); \; i = 1, 2, \ldots, n-1; \; j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$v_n = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Valorile găsite pentru v_i în diferitele iteraţii ce urmează a fi efectuate le vom nota cu $v_i^{(0)}$, $v_i^{(0)}$, $v_i^{(2)}, \ldots, v_i^{(k)}, \ldots$

În iteraţia zero $(k = 0)$ se defineşte:

$$v_i^{(0)} = c_{in} \text{ şi } v_n^{(0)} = 0;\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1.$$

În prima iteraţie $(k = 1)$, se calculează valorile:

$$v_i^{(1)} = \min_{j \neq i} (v_j^{(0)} + c_{ij}) \text{ şi } v_n^{(1)} = 0;\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1$$
$$j = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

Procedeul se repetă în mod analog şi în iteraţiile următoare, pînă cînd se ajunge la iteraţia de ordinul k, în care se determină valorile:

$$v_i^{(k)} = \min_{j \neq i} (v_j^{(k-1)} + c_{ij}) \text{ şi } v_n^{(k)} = 0;\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1$$
$$j = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

Iteraţiile se opresc atunci cînd, pentru toţi $k = 0,\ 1, \ldots$

$$v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)};\ \ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1.$$

Numărul $v_i^{(k)}$ reprezintă valoarea drumului minim între vîrfurile x_i şi x_n ale grafului considerat.

Se poate arăta că într-un graf cu $n + 1$ vîrfuri, sînt necesare cel mult $n - 1$ iteraţii pentru a găsi valoarea drumului minim $(k \leqslant n - 1)$. Rezultatele obţinute se trec într-un tabel de forma:

r \ $v_i^{(r)}$	$v_0^{(r)}$	$v_1^{(r)}$	...	$v_{n-1}^{(r)}$
0	$v_0^{(0)}$	$v_1^{(0)}$	...	$v_{n-1}^{(0)}$
1	$v_0^{(1)}$	$v_1^{(1)}$	...	$v_{n-1}^{(1)}$
...	...	...	...	...
k	$v_0^{(k)}$	$v_1^{(k)}$	...	$v_{n-1}^{(k)}$

Pentru exemplificare ne propunem să aplicăm acest algoritm în graful din figura 170. Numerele c_{ij} scrise pe arcele grafului reprezintă costul transportului din x_i în x_j. Se scrie matricea costurilor:

$(c_{ij}) =$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	0	14	10	12	∞	∞	∞	∞	∞
x_1	∞	0	∞	8	8	∞	∞	∞	∞
x_2	7	5	0	4	12	2	15	∞	∞
x_3	5	∞	∞	0	∞	10	∞	∞	∞
x_4	∞	∞	∞	∞	0	6	15	4	∞
x_5	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	12	∞
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	9	20
x_7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	6	0	16
x_8	∞	∞	12	∞	∞	∞	∞	∞	0

Scanned with OKEN Scanner

În iterația zero ($k = 0$) se scriu valorile:

$$v_i^{(0)} = c_{i8}; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 8$$

care se iau direct din ultima coloană a matricei (c_{ij}).

$$v_0^{(0)} = v_1^{(0)} = v_2^{(0)} = v_3^{(0)} = v_4^{(0)} = v_5^{(0)} = \infty; \; v_6^{(0)} = 20; \; v_7^{(0)} = 16; \; v_8^{(0)} = 0.$$

În prima iterație ($k = 1$) se determină valorile:

$$v_i^{(1)} = \min_{j \neq i} (v_j^{(0)} + c_{ij}); \; i = 0, 1, \ldots, n-1$$
$$j = 0, 1, \ldots, n.$$

Se obține succesiv:

$$i = 0; \; j \neq 0; \; v_0^{(1)} = \min (v_1^{(0)} + c_{01}, \; v_2^0 + c_{02}, \ldots, \; v_8^{(0)} + c_{08}) =$$
$$= \min (\infty + 14, \; \infty + 10, \; \infty + 12, \; \infty + \infty, \; \infty + \infty, \; 20 + \infty, \; 16 + \infty, \; 0 + \infty) = \infty$$

(s-a convenit ca, dacă în sumele considerate nu figurează sume finite de forma $a_1 + a_2$, $\min (\ldots, a + \infty, \ldots)$ să fie egal cu ∞).

$$i = 1; \; j \neq 1; \; v_1^{(1)} = \min (v_0^{(0)} + c_{10}, \; v_2^{(0)} + c_{12}, \ldots, \; v_8^{(0)} + c_{18}) = \min (\infty + \infty, \; \infty + \infty, \; \infty + 8, \; \infty + 8, \; \infty + \infty, \; 20 + \infty, \; 16 + \infty, \; 0 + \infty) = \infty.$$

$$i = 2; \; j \neq 2; \; v_2^{(1)} = \min (v_0^{(0)} + c_{20}, \; v_0^{(1)} + c_{21}, \; v_3^{(0)} + c_{23}, \ldots, \; v_8^{(0)} + c_{28}) =$$
$$= \min (\infty + 7, \; 5 + \infty, \; \infty + 4, \; 12 + \infty, \; \infty + 2, \; 20 + 15, \; 16 + \infty, \; 0 + \infty) = 35.$$

. . . . . .

$$i = 7; \; j \neq 7; \; v_7^{(1)} = \min (v_0^{(0)} + c_{70}, \; v_1^0 + c_{71}, \ldots, \; v_6^{(0)} + c_{76}, \; v_8^{(0)} + c_{78}) = \min (\infty + \infty, \; \infty + \infty, \; \infty + \infty, \; \infty + \infty, \; \infty + \infty, \; \infty + \infty, \; 0 + 20, \; 0 + 16) = 16.$$

$$i = 8; \; j \neq 8; \; v_8^{(1)} = 0.$$

Se procedează la fel și pentru celelalte iterații, făcînd $k = 2, 3, \ldots$ Valorile $v_i^{(k)}$ astfel obținute au fost trecute în tabela:

k \ $v_i^{(k)}$	$v_0^{(k)}$	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	20	16	0
1	∞	∞	35	∞	20	28	20	16	0
2	45	28	30	38	20	28	20	16	0
3	40	28	30	38	20	28	20	16	0
4	40	28	30	38	20	28	20	16	0

Scanned with OKEN Scanner

Se constată că ultimile două linii sînt egale:

$$v_i^{(3)} = v_i^{(4)}; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 8.$$

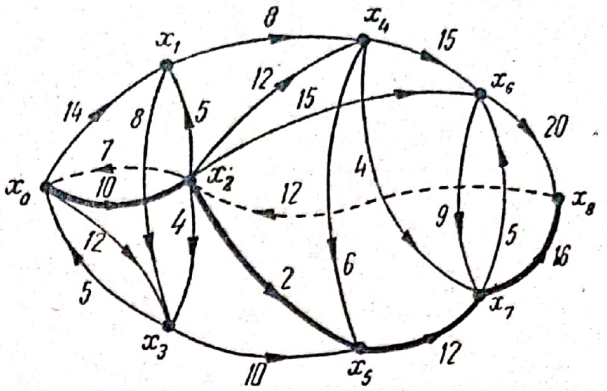


Fig. 170.

Aceasta înseamnă că în iterația 4 se repetă rezultatele din iterația 3, și deci $v_0^{(3)} = v_0^{(4)} = 40$ reprezintă valoarea minimă a drumului dintre vîrfurile x_0 și x_8.

Pentru a stabili drumul optim, se pleacă din vîrful x_0. Vîrful imediat următor al drumului minim este acel vîrf x_i pentru care avem satisfăcută relația: $c_{0i} = v_i = v_0$. Pentru $i = 2$, avem: $c_{02} + v_2 = v_0 \Rightarrow 10 + 30 = 40$, deci după vîrful x_0 urmează x_2.

După x_2 urmează acel vîrf pentru care $c_{2i} + v_i = v_2$.

Acest vîrf este x_5 deoarece $c_{25} + v_5 = v_2 \Rightarrow 2 + 28 = 30$.

În mod analog se obțin și vîrfurile x_7 și x_8.

Costul minim se va realiza pe traseul $\mu(x_0, x_2, x_5, x_7, x_8)$, marcat în figura 170 printr-o linie groasă și va fi $l(\mu) = 40$.

Observații. Graful din figura 170 nefiind simetric, valoarea minimă a drumurilor de la x_8 la x_0 va fi diferită de valoarea minimă a drumurilor de la x_0 la x_8.

Într-adevăr, se constată că valoarea minimă a drumului de la x_8 la x_0 este $l(\mu) = 19$ și se realizează pe traseul $\mu = (x_8, x_2, x_0)$, marcat prin arce punctate în graful din figura 170.

Aplicarea logaritmului Bellman-Kalaba se reduce la următoarele operații cu matrice.

Se observă mai întîi că valorile $v_i^{(0)}$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sînt egale cu elementele ultimei coloane ale matricei (c_{ij}).

Acestei matrice i se atașează o *matrice de extensie* ale cărei elemente se obțin astfel:

Se adună elementele liniilor matricei (c_{ij}) la elementele ultimei sale coloane (exceptînd adunarea elementelor situate pe diagonală). Din sumele astfel obținute, se reține sumele minime care se înscriu în prima coloană a matricei de extensie. Se constată ușor că elementele acestei coloane sînt egale cu valorile $v_i^{(1)}$ determinate în prima iterație $(k = 1)$.

Procedeul se repetă adunînd liniile matricei (c_{ij}) la elementele coloanei I a matricei de extensie și se reține sumele minime. Aceste sume reprezintă coloana II a matricei de extensie și sînt egale cu valorile $v_i^{(2)}$ obținute în iterația a doua $(k = 2)$.

Procedeul se continuă pînă cînd în matricea de extensie se obțin două coloane identice consecutive.

Primul element al ultimei (sau penultimei) coloane din matricea de extensie reprezintă valoarea drumului minim. Numărul coloanelor matricei de extensie este egal cu numărul iterațiilor necesare pentru obținerea drumului minim.

Scanned with OKEN Scanner

Folosind datele din exemplul precedent se obține următoarea matrice de extensie:

	I	II	III	IV	X
x_0		45	40	40	x_2
x_1		28	28	28	x_4
x_2	35	30	30	30	x_5
x_3		38	38	38	x_5
x_4	20	20	20	20	x_7
x_5	28	28	28	28	x_7
x_6	20	20	20	20	x_8
x_7	16	16	16	16	x_8
x_8	0	0	0	0	x_8

Cum coloanele III și IV sînt identice, rezultă:

$$\min \; l(\mu_0) = 40; \qquad \mu_0 = (x_0, x_2, x_5, x_7, x_8).$$

Drumul minim se obține astfel:

Se pornește de la elementul minim din ultima coloană (sau penultima coloană), care este 16. Acest element precizează drumul de la ultimul vîrf la penultimul, adică (x_7, x_8). Se scrie x_8 pe linia x_7 în coloana X.

În general se va trece pe linia i în coloana X acel vîrf x_{j_0} pentru care:

$$v_i^{(k)} = v_{j_0}^{(k-1)} + c_{ij_0}.$$

În acest mod se obține o succesiune de vîrfuri care se vor înscrie în coloana X. Cu ajutorul acestei coloane se poate determina ușor drumul minim de la oricare vîrf la vîrful final.

În acest scop se va urmări secvența vîrfurilor începînd de la vîrful corespunzător din coloana X și apoi în continuare, la corespondentul acestuia din linia respectivă în coloana X. În exemplul dat, drumul de valoare minimă de la x_0 la x_8 va fi:

$$\mu_0(x_0, x_2, x_5, x_7, x_8); \qquad l(\mu_0) = 40.$$

Într-adevăr, pe linia lui x_0, în coloana X găsim pe x_2, pe linia lui x_2 în coloana X găsim pe x_5, pe linia lui x_5 în coloana X se află x_7, iar pe linia lui x_7 în coloana X găsim pe x_8.

În mod analog se obține drumurile de valoare minimă de la:

x_1 la x_8; $\mu_1(x_1, x_4, x_7, x_8)$; $l(\mu_1) = 28$;
x_2 la x_8; $\mu_2(x_2, x_5, x_7, x_8)$; $l(\mu_2) = 30$;
x_3 la x_8; $\mu_3(x_3, x_5, x_7, x_8)$; $l(\mu_3) = 38$;
x_4 la x_8; $\mu_4(x_4, x_7, x_8)$; $l(\mu_4) = 20$;
x_5 la x_8; $\mu_5(x_5, x_7, x_8)$; $l(\mu_5) = 28$;
x_6 la x_8; $\mu_6(x_6, x_8)$; $l(\mu_6) = 20$;
x_7 la x_8; $\mu_7(x_7, x_8)$; $l(\mu_7) = 16$.

Valorile minime $l(\mu_i)$; $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ se iau direct din coloana IV linia i a matricei de extensie.

Scanned with OKEN Scanner

Simplitatea algoritmului Bellman-Kalaba (care se reduce la însumarea succesivă a elementelor situate pe liniile şi coloanele unei matrice şi reţinerea sumelor minime), permite programarea lui cu uşurinţă la maşinile electronice de calcul.

O îmbunătăţire a algoritmului Bellman-Kalaba a fost propusă de I. Tomescu în [18].

§ 6. Drumul de valoare maximă într-un graf

În unele probleme se cere să se determine drumul ce trebuie parcurs între două vîrfuri ale unui graf, astfel încît valoarea acestui drum să fie maximă.

În astfel de cazuri numerele c_{ij} pot reprezenta: productivitatea muncii, probabilitatea de realizare a unui fenomen etc.

Algoritmul Bellman-Kalaba se poate aplica şi pentru determinarea drumului de valoare maximă, cu condiţia ca graful să nu conţină nici bucle, nici circuite, deoarece în astfel de cazuri lungimea unui drum poate să nu fie finită, iar valoarea lui nu este mărginită.

Pentru a obţine drumul de valoare maximă se folosesc aceleaşi relaţii ca şi la determinarea drumului minim, cu deosebire că în matricea asociată grafului se va lua:

$$c_{ij} = -\infty, \text{ dacă } x_{ij} \notin U$$

iar simbolul min se va înlocui cu max. Se va calcula:

$$v_i^{(k)} = \max_{j \neq i} (v_j^{(k-1)} + c_{ij});$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, \ldots n$$

pentru $k = 1, 2, 3, \ldots,$; şi ne oprim atunci cînd:

$$v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}; \; i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

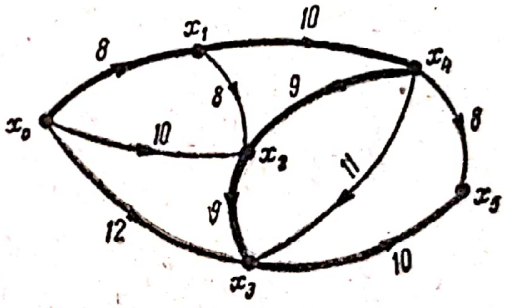


Fig. 171.

Exemplu. Să se determine drumul de valoare maximă între vîrfurile x_0 şi x_5 în graful din figura 171. Pornind de la matricea grafului:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0	8	10	12	$-\infty$	$-\infty$
x_1	$-\infty$	0	8	$-\infty$	10	$-\infty$
x_2	$-\infty$	$-\infty$	0	9	$-\infty$	$-\infty$
x_3	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	10
x_4	$-\infty$	$-\infty$	9	11	0	8
x_5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

$= (c_{ij})$

se determină ușor elementele matricei extinse:

	I	II	III	IV	V	X
x_0	22	29	39	46	46	x_1
x_1	18	31	38	38	38	x_4
x_2	19	19	19	19	19	x_3
x_3	10	10	10	10	10	x_5
x_4	21	28	28	28	28	x_2
x_5	0	0	0	0	0	x_5

Se constată că valoarea maximă a drumului de la x_0 la x_5 este 46 (primul element din coloana V a matricei extinse). Drumul maxim de la x_0 la x_5 este:

$$\mu = (x_0, x_1, x_4, x_2, x_3, x_5)$$

trasat prin linii groase în graful din figura 171.

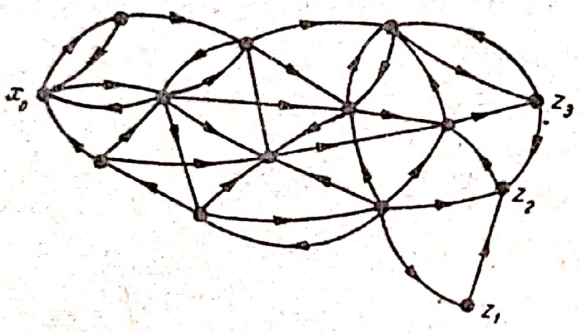


Fig. 172.

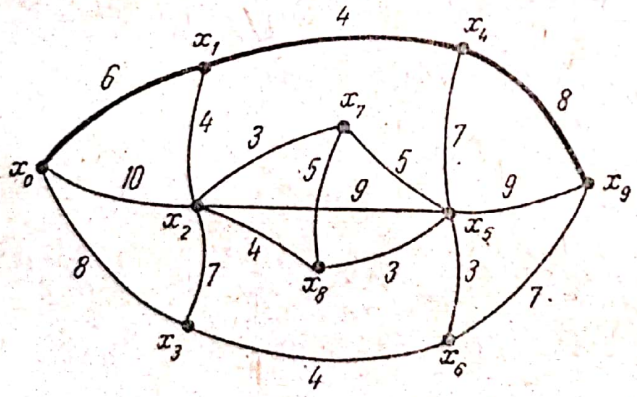


Fig. 173.

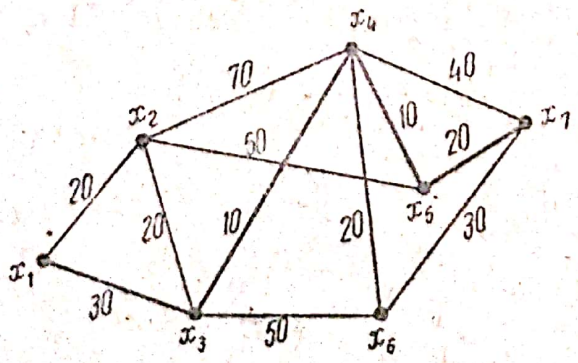


Fig. 174.

Probleme propuse

1. Să se determine drumul cel mai scurt între vîrfurile x_0, z_1; x_0, z_2 și x_0, z_3 în graful din figura 172.

R: Se va găsi $d(x_0, z_1) = d(x_0, z_2) = d(x_0, z_3) = 4$.

2. Se cere drumul de valoare minimă între vîrfurile x_0, și x_9 și apoi între x_9 și x_0 în graful simetric din figura 173.

R: Se va găsi $l(\mu) = 18$; $\mu = (x_0, x_1, x_4, x_9)$.

3. Să se afle traseul ce trebuie parcurs de un autovehicul care pleacă din vîrful x_1 și trebuie să ajungă în x_7 într-un timp total minim, folosind graful din figura 174. Numerele scrise pe arcele grafului reprezintă timpul exprimat în minute pentru a parcurge distanța dintre două vîrfuri consecutive.

Scanned with OKEN Scanner

R. Pornind de la matricea asociată grafului se va obține matricea extinsă :

	I	II	III	IV	X
x_1		80	70	70	x_3
x_2	70	70	60	60	x_3
x_3	50	40	40	40	x_4
x_4	30	30	30	30	x_5
x_5	20	20	20	20	x_7
x_6	30	30	30	30	x_7
x_7	0	0	0	0	x_7

din care se constată că după 4 iterații se obțin două coloane identice. Dacă autovehiculul va urma traseul $\mu = (x_1, x_3, x_4, x_5, x_7)$ el va ajunge din x_1 în x_7 în timpul minim de 70 minute $l(\mu) = 70$.

4. Să se determine drumul de valoare maximă de la x_0 la x_{11} și apoi de la x_1 la $x_{11}, \ldots$, de la x_5 la x_{11}, precum și traseul corespunzător, folosind graful din figura 175.

R. Folosind matricea asociată grafului (c_{ij}) se determină matricea extinsă din care se deduce :

$\mu_0 = (x_0, x_4, x_3, x_2, x_7, x_9, x_{11})$; $l(\mu_0) = 33$
$\mu_1 = (x_1, x_2, x_7, x_9, x_{11})$; $l(\mu_1) = 27$
$\mu_1' = (x_1, x_3, x_2, x_7, x_9, x_{11})$; $l(\mu_1') = 27$
$\mu_2 = (x_2, x_7, x_9, x_{11})$; $l(\mu_2) = 18$
$\mu_3 = (x_3, x_2, x_7, x_9, x_{11})$; $l(\mu_3) = 20$
$\mu_4 = (x_4, x_3, x_2, x_7, x_9, x_{11})$; $l(\mu_4) = 29$
$\mu_5 = (x_5, x_6, x_7, x_9, x_{11})$; $l(\mu_5) = 22$.

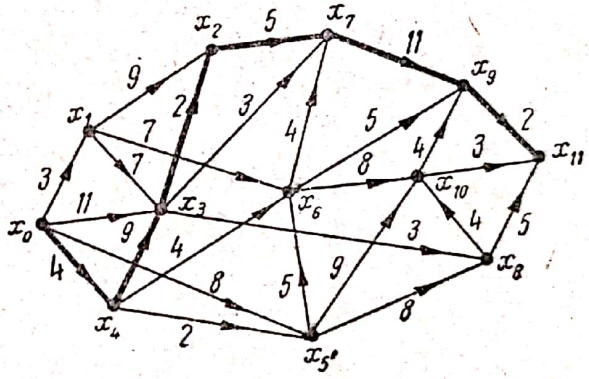


Fig. 175.

	1	2	3	4	5	6	X
x_0	$-\infty$	21	27	31	33	33	x_4
x_1	$-\infty$	18	27	27	27	27	x_2, x_3
x_2	$-\infty$	18	18	18	18	18	x_7
x_3	8	16	20	20	20	20	x_2
x_4	$-\infty$	17	25	29	29	29	x_3
x_5	13	16	22	22	22	22	x_6
x_6	11	17	17	17	17	17	x_7
x_7	13	13	13	13	13	13	x_9
x_8	7	10	10	10	10	10	x_{10}
x_9	2	2	2	2	2	2	x_{11}
x_{10}	6	6	6	6	6	6	x_9
x_{11}	0	0	0	0	0	0	x_{11}

Scanned with OKEN Scanner

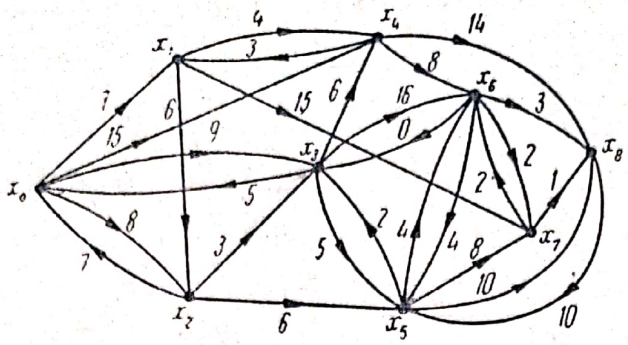


Fig. 176.

5. Folosind graful din figura 176 să se determine:
a. Depărtările, $d(x_0, x_8)$ și $d(x_8, x_0)$.
b. Drumul de valoare minimă între vîrfurile x_0, x_8 și x_8, x_0.

R. a. $d(x_0, x_8) = 2$; $\mu = (x_0, x_4, x_8)$ și $d(x_8, x_0) = 3$; $\mu = (x_8, x_5, x_3, x_0)$
b. Din matricea asociată grafului se obține matricea extinsă:

	I	II	III	IV	X
x_0	29	23	21	21	x_2, x_3
x_1	16	15	15	15	x_4
x_2	16	13	13	13	x_5
x_3	15	12	12	12	x_5
x_4	11	11	11	11	x_6
x_5	7	7	7	7	x_6
x_6	3	3	3	3	x_7, x_8
x_7	1	1	1	1	x_8
x_8	0	0	0	0	x_8

din care se constată că problema admite 4 soluții:

$$\mu_1 = (x_0, x_2, x_5, x_6, x_8);$$
$$\mu_2 = (x_0, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8);$$
$$\mu_3 = (x_0, x_3, x_5, x_6, x_8);$$
$$\mu_4 = (x_0, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8).$$
$$l(\mu) = 21.; \; i = 1, 2, 3, 4.$$

Există un singur drum de valoare minimă de la x_8 la x_0:

$$\mu = (x_8, x_5, x_3, x_0); \; l(\mu) = 17.$$

§ 7. Relație de ordine strictă într-un graf

Dacă între vîrfurile x_i și x_j ale unui graf există un drum de la x_i către x_j se va scrie $x_i < x_j$ și constituie o relație de ordine strictă. O astfel de relație este tranzitivă ($x_i < x_j$ și $x_j < x_k \Rightarrow x_i < x_k$).

În acest caz se spune că vîrful x_i precede pe x_j sau că x_i este un ascendent al lui x_j. Vîrful x_j care succede lui x_i este un descendent al lui x_i.

Scanned with OKEN Scanner

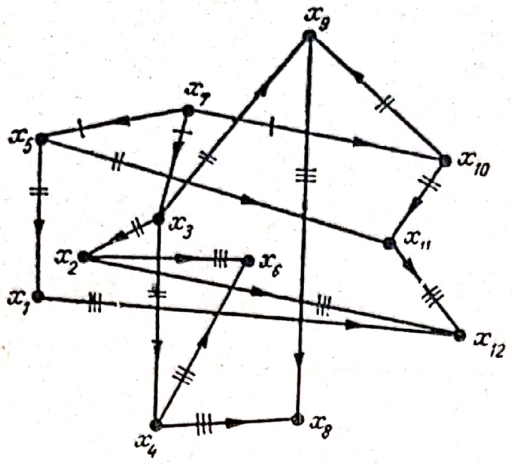


Fig. 177.

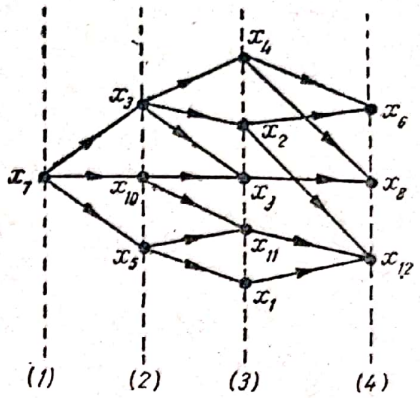


Fig. 178.

Operaţiile care se execută într-un proces tehnologic pentru realizarea unui produs se succed într-o anumită ordine cronologică. Vîrfurile grafului care reflectă acest proces sînt într-o relaţie de ordine strictă. Operaţia x_i trebuie să aibă loc înaintea unei alte operaţii x_j.

Condiţia ca între vîrfurile unui graf să existe o relaţie de ordine strictă este ca el să nu conţină nici un circuit. Un exemplu este dat în graful din figura 177.

Vîrfurile grafului pot fi împărţite în submulţimi, numite *nivele* sau *aliniamente*. Fiecare nivel conţine numai vîrfuri la care se poate ajunge din vîrfurile *nivelelor anterioare* şi din care se poate pleca spre vîrfurile *nivelelor următoare*.

Vîrfurile primului nivel nu au ascendenţi.

Vîrfurile ultimului nivel nu au descendenţi.

Vîrfurile aceluiaşi nivel nu pot fi unite între ele.

Graful din figura 178 este ordonat şi conţine 4 nivele. Se constată uşor că nivelul 1 conţine un singur vîrf şi nu are ascendenţi.

Vîrfurile nivelelor 2 şi 3 au ascendenţi şi descendenţi, iar vîrfurile ultimului nivel 4 nu au descendenţi.

§ 8. Descompunerea unui graf conex fără circuite în nivele

Introducere. Fiind dat un graf conex fără circuite se pune problema de a împărţi vîrfurile lui pe nivele.

Determinarea nivelelor se poate face direct pe graf folosind următorul algoritm :

Se determină vîrfurile care n-au ascendenţi ; aceste vîrfuri formează primul nivel. Se suprimă apoi aceste vîrfuri împreună cu arcele care pleacă din ele, prin tăierea lor cu o linie.

În graful rămas se procedează la fel suprimînd vîrfurile şi arcele incidente spre exterior. Aceste vîrfuri formează nivelul al doilea. Procedeul se continuă pînă la ultimul nivel, care va conţine vîrfuri din care nu mai pleacă nici un arc.

Să aplicăm acest algoritm folosind graful din figura 177.

Se constată că vîrful x_7 este singurul care nu are nici un arc incident spre interior. Primul nivel va cuprinde numai vîrful x_7.

Scanned with OKEN Scanner

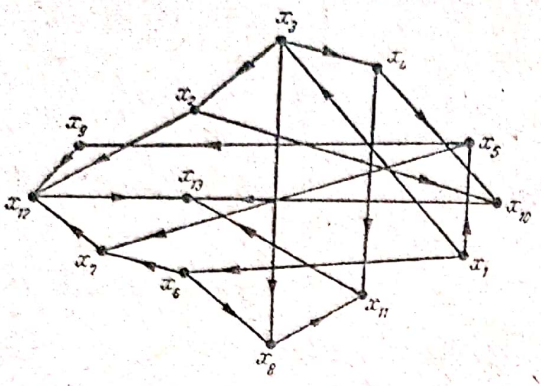


Fig. 179.

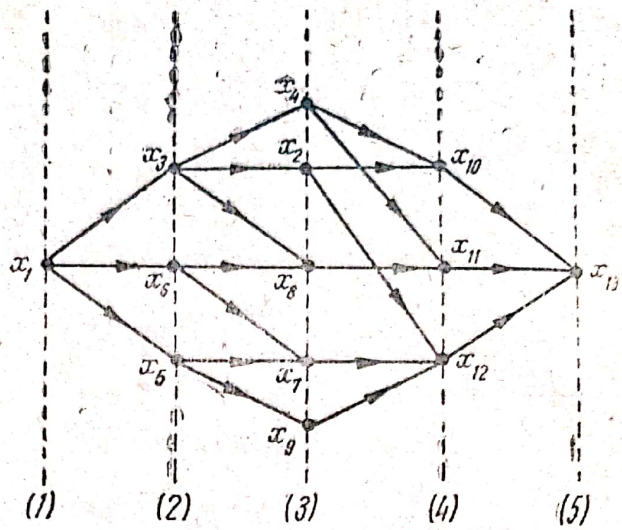


Fig. 180.

Se suprimă vîrful x_7 și arcele ce pleacă din el: (x_7, x_5); (x_7, x_3); (x_7, x_{10}). În graful rămas, vîrfurile x_3, x_5, x_{10} nu mai au decît arce incidente spre exterior; ele vor forma nivelul 2. Se suprimă aceste vîrfuri împreună cu arcele care pleacă din ele.

Procedînd în mod analog în noul graf, se vor suprima vîrfurile x_1, x_2, x_4, x_9, x_{11} care au numai arce indicente spre exterior; ele vor forma nivelul 3.

Vîrfurile rămase nesuprimate x_6, x_8, x_{12} formează nivelul 4. Se obține graful ordonat pe nivele din figura 178.

Exercițiu. Se dă graful din figura 179. Folosind algoritmul expus, să se ordoneze vîrfurile lui pe nivele. Se va găsi graful din figura 180 care conține 5 nivele.

§ 9. Determinarea drumului de valoare optimă între vîrfurile nivelului inițial și final ale unui graf

Dacă graful este ordonat pe nivele, valoarea optimă între vîrfurile situate pe primul nivel și vîrfurile situate pe ultimul nivel se poate obține ușor fără a folosi algoritmul Bellman-Kalaba. Metoda pe care o vom expune se bazează pe principiul optimalității cunoscut din programarea dinamică și care se enunță astfel: *„un drum de valoare minimă (maximă) nu poate fi format decît din drumuri parțiale de valoare minimă (maximă)"*.

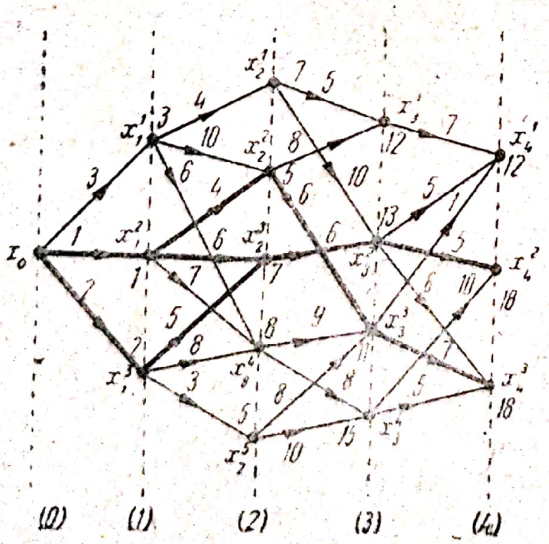


Fig. 181.

Fie graful din figura 181. Ne propunem să găsim drumul minim dintre vîrful x_0 situat pe nivelul 0 și vîrfurile x_4^1, x_4^2, x_4^3 situate pe nivelul 4.

Se atribuie fiecărui vîrf situat pe nivelul 1 cîte un număr care reprezintă valoarea atașată arcului ce pleacă din x_0, incidente în vîrfurile nivelului 1.

Astfel, vîrfurile x_1^1, x_1^2, x_1^3 vor fi marcate cu numerele 3, 1, 2. Pentru vîrfurile situate pe nivelul 2, se calculează suma numerelor cu care au fost marcate vîrfurile nivelului 1 cu valorile arcelor incidente în vîrfurile nivelului 2. Cu sumele minime astfel obținute se vor marca vîrfurile nivelului 2. Astfel, în vîrful x_2^1 avem un singur arc incident, se va marca cu $7 = 3 + 4$. Vîrful x_2^2 se va marca cu min $(3 + 10, 1 + 4) = 5$; x_2^3 cu min $(1 + 6, 2 + 5) = 7$; x_2^4 cu min $(3 + 6, 1 + 7, 2 + 8) = 8$ și x_2^5 cu $5 = 2 + 3$.

Procedeul se continuă în mod analog și cu vîrfurile nivelelor 3 și 4. Numerele cu care au fost marcate vîrfurile ultimului nivel 4, reprezintă valorile minime ale drumurilor de la x_0 la aceste vîrfuri. În exemplul dat, drumurile de valoare minimă de la x_0 la vîrfurile x_4^1, x_4^2, x_4^3 situate pe nivelul 4, marcate cu linii groase în graful din figura 181 sînt:

$$\mu(x_0, \quad x_4^1) = (x_0, \ x_1^2, \ x_2^2, \ x_3^2, \ x_4^1); \ l_{min}(x_0, \ x_4^1) = 12.$$

De la x_0 la x_4^2 avem două drumuri diferite care au aceeași valoare minimă:

$$\mu_1(x_0, \quad x_4^2) = (x_0, \ x_1^2, \ x_2^3, \ x_3^2, \ x_4^2),$$

$$\mu_2(x_0, \quad x_4^2) = (x_0, \ x_1^3, \ x_2^3, \ x_3^2, \ x_4^2),$$

pentru care $l(\mu_1) = l(\mu_2) = 18$.

$$\mu(x_0, \quad x_4^3) = (x_0, \ x_1^2, \ x_2^2, \ x_3^3, \ x_4^3); \ l_{min}(x_0, \ x_4^3) = 18.$$

Folosind același procedeu se poate determina și valoarea maximă a drumurilor dintre vîrfurile situate pe nivele diferite.

Dacă nivelul inițial și final conține cîte un singur vîrf, graful se numește *rețea de transport*. Vîrful inițial x_0 se numește *intrarea rețelei*, iar vîrful final x_n, *ieșirea rețelei*. Dacă numerele scrise pe arcele rețelei reprezintă timpul (sau costul) necesar pentru a parcurge arcul respectiv, soluția minimă ne va arăta traseul ce trebuie parcurs de un mobil de la vîrful inițial x_0 la vîrful final x_n, pentru ca timpul (sau costul) total de parcurs de la x_0 la x_n să fie minim.

Pentru a obține drumul de valoare minimă între vîrfurile x_0 și x_n se atribuie fiecărui vîrf al rețelei pornind din x_0, cîte o valoare care reprezintă minimul sumei valorilor scrise pe arce pînă în acel punct. Numărul cu care a fost marcat vîrful final x_n reprezintă valoarea drumului minim de la x_0 la x_n.

Marcarea vîrfurilor se poate face începînd cu vîrful final x_n pînă cînd se ajunge prin iterații regresive în vîrful inițial x_0 (așa cum se procedează în problemele de programare dinamică).

Probleme propuse

1. În rețeaua de transport din figura 182, numerele scrise pe arce reprezintă timpul (exprimat în ore) pentru a parcurge arcul respectiv. Se cere să se determine itinerariul ce trebuie urmat pentru a ajunge din punctul x_0 în punctul x_8 într-un timp minim.

R. Se va determina drumul de valoare minimă între x_0 și x_8 începînd cu x_0 și terminînd cu x_8. Se va găsi $t_{min} = 20$ ore. Itinerariul a fost marcat cu linii groase și săgeți în figura 183.

Scanned with OKEN Scanner

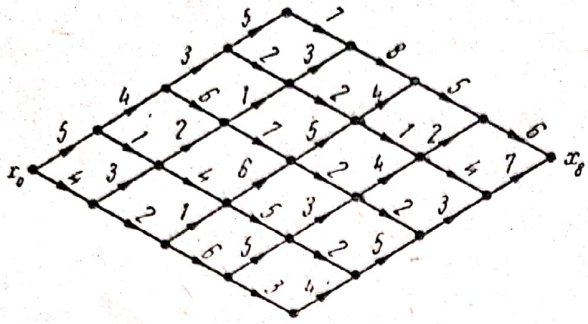


Fig. 182.

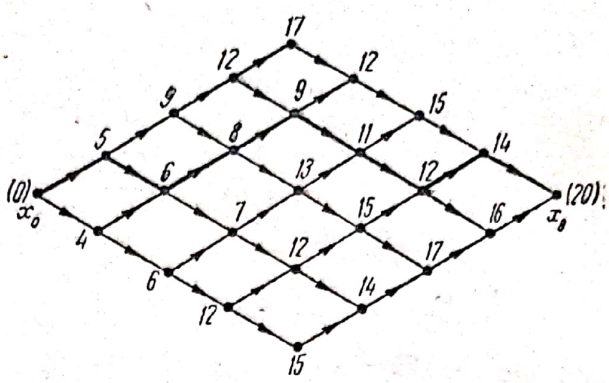


Fig. 183.

2. Folosind aceeaşi reţea (figura 182) să se determine drumul de valoare maximă, începînd marcarea vîrfurilor în sens invers de la x_8 spre x_0.

R. Se va găsi $l_{max} = 43$; drumul de valoare maximă a fost marcat cu linii groase şi săgeţi în figura 184.

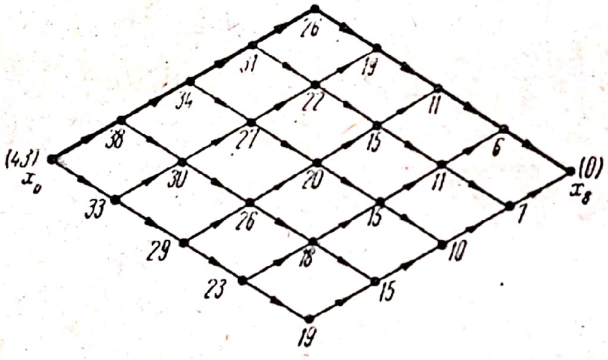


Fig. 184.

3. Un sistem S se găseşte în momentul iniţial în stare x_0. În momentele 1, 2, 3 se poate afla în una din stările indicate în graful din figura 185.

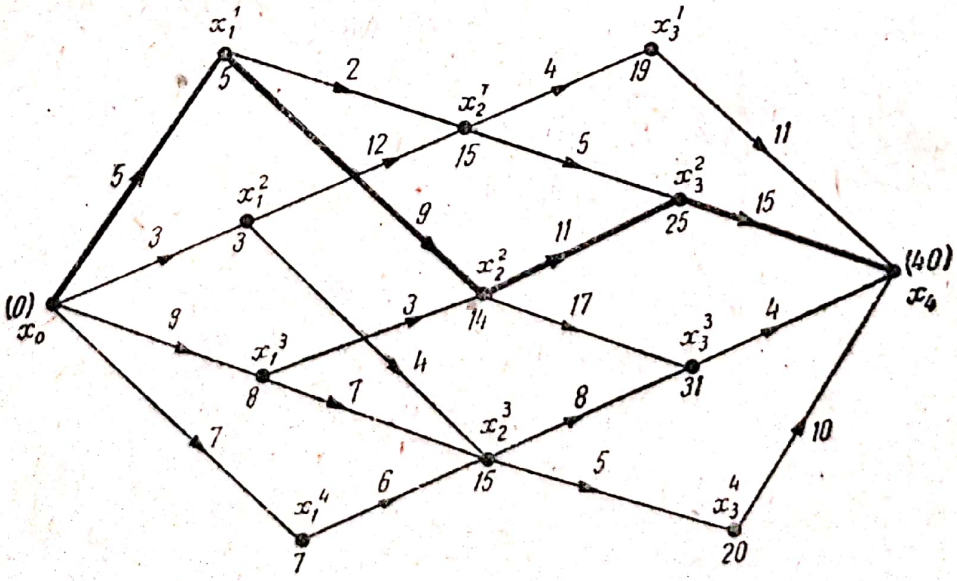


Fig. 185.

Fiecare trecere de la o stare la alta este însoțită de un cîștig a cărui mărime este notată pe arcele grafului.

Se cere să se determine drumul ce trebuie parcurs din starea inițială x_0 pînă în starea finală x_4 care să conducă la un cîștig total maxim.

R. Se vor parcurge arcele grafului în sensul direct (de la x_0 la x_4), apoi în sens regresiv (de la x_4 la x_0). Se va găsi același rezultat:

$$l_{max}(x_0,\ x_4) = 40\ ;\ \mu(x_0,\ x_4) = (x_0,\ x_1^1,\ x_2^2,\ x_3^2,\ x_4).$$

4. Se dă rețeaua de transport din figura 186. Un autovehicul care pleacă din x_0 trebuie să ajungă în z. Numerele scrise pe arcele rețelei reprezintă consumul de carburanți necesar pentru a parcurge distanța ce corespunde arcului.

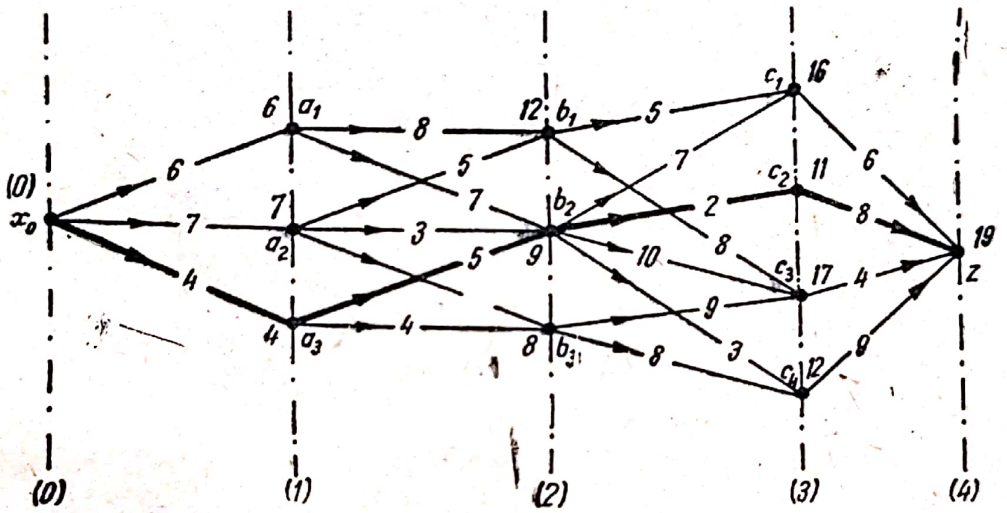


Fig. 186.

Care este traseul pentru care consumul de carburanți este minim și care este consumul în acest caz:

R: $\mu(x_0,\ z) = (x_0,\ a_3,\ b_2,\ c_2,\ z)\ ;\ l_{min}(x_0,\ z) = 19.$

Dacă autovehiculul va parcurge traseul indicat prin linii groase în figura 186, consumul de carburanți va fi minim și egal cu 19.

Scanned with OKEN Scanner

§ 1. Rangul unei matrice

Fie $A = (a_{ij})_{mn}$ o matrice cu m linii și n coloane.

Numim rang al matricei A și-l notăm cu p ($p = \text{rang } A$), ordinul cel mai mare p al minorilor diferiți de zero ce se pot forma cu liniile și coloanele matricei A.

Dacă în A suprimăm $m-p$ linii și $n-p$ coloane se obține un tablou cu p linii și p coloane. Determinantul acestui tablou se numește minor de ordinul p al matricei A.

Deoarece prin definiție matricea nulă are rangul zero, putem scrie:

$$0 \leqslant p \leqslant \min\ (m, n).$$

Se știe, de asemenea că rangul unei matrice nu se schimbă dacă efectuăm următoarele *transformări elementare:*

— înmulțim elementele unei linii cu un număr nenul;

— schimbăm două linii între ele;

— adunăm unei linii elementele altei linii, înmulțite cu un factor constant.

Folosind aceste proprietăți, se transformă matricea dată în matrice superior triunghiulare (cu elementele situate sub diagonala principală egale cu zero).

Rangul matricei este egal cu numărul maxim al elementelor nenule, situate pe diagonala principală a matricelor triunghiulare formate.

Cum elementele situate pe diagonala principală se numesc *pivoți*, putem spune că: rangul unei matrice este egal cu numărul maxim al pivoților nenuli din matricele triunghiulare formate.

Transformarea în matrice triunghiulare se face astfel:

Pasul 1. Prima linie rămîne neschimbată. Din linia i înmulțită cu $a_{11} \neq 0$, se scade prima linie înmulțită cu

$$a_{i1}\ ;\quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

În urma acestei operații, elementele din prima coloană devin nule în afară de a_{11}.

Un element oarecare $a_{ij}^{(1)}$, situat pe linia i și coloana j după primul pas, va fi dat de formula:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix};\ \begin{matrix} i = 2, 3, \ldots, m; \\ j = 1, 2, \ldots, n, \end{matrix}$$

cunoscută și sub numele de *regula dreptunghiului.*

Scanned with OKEN Scanner

Pasul 2. Se suprimă linia și coloana pivotului și operația se continuă cu matricea rămasă, considerînd pe $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ca pivot. După $(m-1)$ pași dacă $m < n$, sau după $(n-1)$ pași dacă $n < m$, matricea A va fi transformată în matrice triunghiulare.

Exemplu. Se cere rangul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Folosind regula dreptunghiului, după doi pași se obține:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 5 & 8 & 14 \\ 0 & -2 & 10 & 16 & 29 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -16 \\ 0 & -1 & 5 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se constată că matricile triunghiulare formate din coloana 1, una din coloanele 2, 3 sau 4 și coloana 5 conțin cîte 3 pivoți nenuli (celelalte conțin numai cîte două) deci rang $A = 3$.

Observații

— În fiecare pas se pot face simplificări pe linii înainte de a trece la pasul următor.

— După fiecare pas, linia și coloana pivotului nu se mai scriu, ne mai fiind necesare în pasul următor.

— Dacă min $(m, n) = m$ și în pasul $(m-1)$ primii m pivoți sînt nenuli, calculele nu se mai fac pentru ultimile $(n-m)$ coloane; rang $A = m$.

Numărul operațiilor elementare se reduc în acest caz cu:

$$\Delta(m, n) = 3m(m-1)(n-m) : 2.$$

Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -13 & \dots \\ -5 & -33 & \dots \end{pmatrix} \to (1 \dots).$$

Cum min $(m, n) = \min(3, 6) = 3$, iar în pasul doi, primii 3 pivoți sînt nenuli $(1, -2, 1)$, elementele situate pe coloanele 4, 5, 6 din pasul 1 și doi nu au mai fost calculate, rang $A = 3$.

Numărul operațiilor a fost redus cu:

$$\Delta(m, n) = 3\ m \cdot (m-1)(n-m) : 2 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 : 2 = 27.$$

— Dacă min $(m, n) = n$, și în pasul $(n-1)$; primii n pivoți sînt nenuli, elementele situate pe ultimele $(m-n)$ linii nu se mai calculează, rang $A = n$. În acest caz, numărul operațiilor elementare se va reduce cu:

$$\Delta(n, m) = 3\ n \cdot (n-1)(m-n) : 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pasul 2. Se suprimă linia și coloana pivotului și operația se continuă cu matricea rămasă, considerînd pe $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ca pivot. După $(m-1)$ pași dacă $m < n$, sau după $(n-1)$ pași dacă $n < m$, matricea A va fi transformată în matrice triunghiulare.

Exemplu. Se cere rangul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Folosind regula dreptunghiului, după doi pași se obține:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 5 & 8 & 14 \\ 0 & -2 & 10 & 16 & 29 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -16 \\ 0 & -1 & 5 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se constată că matricile triunghiulare formate din coloana 1, una din coloanele 2, 3 sau 4 și coloana 5 conțin cîte 3 pivoți nenuli (celelalte conțin numai cîte două) deci rang $A = 3$.

Observații

— În fiecare pas se pot face simplificări pe linii înainte de a trece la pasul următor.

— După fiecare pas, linia și coloana pivotului nu se mai scriu, ne mai fiind necesare în pasul următor.

— Dacă min $(m, n) = m$ și în pasul $(m-1)$ primii m pivoți sînt nenuli, calculele nu se mai fac pentru ultimile $(n-m)$ coloane; rang $A = m$.

Numărul operațiilor elementare se reduc în acest caz cu:

$$\Delta(m, n) = 3m(m-1)(n-m) : 2.$$

Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -13 & \dots \\ -5 & -33 & \dots \end{pmatrix} \to (1 \dots).$$

Cum min $(m, n) = \min(3, 6) = 3$, iar în pasul doi, primii 3 pivoți sînt nenuli $(1, -2, 1)$, elementele situate pe coloanele 4, 5, 6 din pasul 1 și doi nu au mai fost calculate, rang $A = 3$.

Numărul operațiilor a fost redus cu:

$$\Delta(m, n) = 3\ m \cdot (m-1)(n-m) : 2 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 : 2 = 27.$$

— Dacă min $(m, n) = n$, și în pasul $(n-1)$; primii n pivoți sînt nenuli, elementele situate pe ultimele $(m-n)$ linii nu se mai calculează, rang $A = n$. În acest caz, numărul operațiilor elementare se va reduce cu:

$$\Delta(n, m) = 3\ n \cdot (n-1)(m-n) : 2.$$

Exemplu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & -9 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 6 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -8 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Se constată că $\min(m, n) = \min(6, 4) = 4$, iar în pasul 3, primii 4 pivoţi sînt nenuli (2, 1, −4, −8). Elementele situate pe liniile 5, 6 din pasul 1, 2 şi 3 nu au mai fost calculate; rang $A = 4$. În acest caz, numărul operaţiilor elementare a fost redus cu:

$$\Delta(n, m) = 3n \cdot (n-1)(m-n) : 2 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (6-4) : 2 = 36.$$

§ 2. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

În literatura de specialitate se cunosc astăzi un număr de peste 25 de metode sau variante pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare. Dintre acestea, metoda Cramer care din păcate încă se mai învaţă în liceu, împreună cu metoda matriceală sînt cele mai laborioase, necesită numărul maxim de operaţii elementare (pentru un sistem de 10 ecuaţii cu 10 necunoscute numărul operaţiilor este de ordinul milioanelor).

Menţionăm cu această ocazie că metodele menţionate (Cramer şi matriceală) nu se mai programează astăzi la nici una din maşinile electronice de calcul.

a. Metoda eliminării succesive (sau metoda eliminării parţiale), pe care o vom expune este simplă, poate fi uşor programată pe calculatoarele electronice, necesită un număr foarte redus de operaţii elementare în comparaţie cu celelalte metode şi exclude operaţiile cu fracţii.

Fie sistemul

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{aligned} \tag{1}$$

de n ecuaţii liniare cu n necunoscute sau, sub forma matriceală:

$$AX = B; \quad A = (a_{ij}),$$
$$X = (x_j); \quad B = (b_i),$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Folosind metoda eliminării succesive, prima ecuaţie rămîne neschimbată, din ecuaţia a doua se elimină x_1, din ecuaţia a treia se elimină x_1 şi x_2, ş.a.m.d. din ecuaţia n se elimină $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

În acest scop se scrie matricea completă $(A|B)$ a sistemului (1) şi se transformă într-o matrice superior triunghiulară.

Scanned with OKEN Scanner

Pasul 1. Se consideră $a_{11} \neq 0$ ca pivot[1]. Elementele situate pe linia pivotului rămîn neschimbate.

Din linia i înmulțită cu a_{11} se scade prima linie înmulțită cu a_{i1}, $(i = 2, 3, \ldots, n)$.

În acest mod, elementele din prima coloană devin nule în afară de pivot care rămîne neschimbat $(a_{11} \neq 0)$.

Un element oarecare $a_{ij}^{(1)}$ situat pe linia i coloana j, precum și termenul liber corespunzător $b_i^{(1)}$ după primul pas, se vor obține din relațiile:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{11}\, a_{ij} - a_{i1}\, a_{1j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}; \quad b_i^{(1)} = a_{11}\, b_i - a_{i1}\, b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{i1} & b_i \end{vmatrix},$$

(adică se va folosi *regula dreptunghiului*).

Situația după primul pas este:

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right).$$

Pasul 2. Se procedează în mod analog cu matricea obținută în primul pas, suprimînd linia și coloana pivotului și considerînd pe $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ca pivot (dacă $a_{22}^{(1)} = 0$, se procedează ca în pasul 1).

După $n - 1$ pași se obține matricea triunghiulară

$$(A\,|\,B) \to \ldots \to (A\,|\,B)^{(n-1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right),$$

din care se obține soluția sistemului dat:

$$x_n^0 = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \ldots, \quad x_1^0 = \frac{b_1 - a_{1n}\, x_n^0 - \ldots - a_{12}\, x_2^0}{a_{11}}.$$

Observații

— Linia și coloana pivotului din fiecare pas se pot suprima, nemaifiind necesare în calcule în pașii următori.

— Se pot face simplificări pe linii în fiecare pas înainte de a trece la pasul următor.

Exemplu. Să se rezolve sistemul

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & - & 7x_5 = 0 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & & & - & 2x_5 = 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & = 20 \\ & & 2x_2 & - & 5x_3 & & & + & x_5 = 23 \\ x_1 & - & x_2 & & & + & 3x_4 & & = -14. \end{array}$$

[1] Dacă $a_{11} = 0$, se face o schimbare de linii aducînd în prima linie un element $a_{i1} \neq 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Scanned with OKEN Scanner

Se scrie matricea completă a sistemului și după 4 pași se obține:

$$(A\,|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & -2 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 1 & 23 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{-2} & -1 & 4 & 12 & 1 \\ -2 & -3 & 5 & 21 & 20 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 23 \\ -2 & -1 & 5 & 7 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & -1 & -9 & -19 \\ 6 & -4 & -13 & -24 \\ 0 & -1 & 5 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{-1} & 14 & 33 \\ -1 & 5 & 15 \end{array}\right) \to (\mathbf{9}\,|18).$$

În pasul 2 și 3 elementele matricei complete au fost simplificate pe fiecare linie cu 2.

Se obține soluția:

$x_5 = 18 : 9 = 2$; $x_4 = (33 - 28) : (-1) = -5$; $x_3 = (-19 + 18 - 5) : 2 = -3$,

$x_2 = (1 - 24 + 20 - 3) : (-2) = 3$; $x_1 = 14 - 10 + 3 - 3 = 4$.

$x_1 = 4$; $x_2 = 3$; $x_3 = -3$; $x_4 = -5$; $x_5 = 2$.

Pentru a ne da seama de eficiența acestei metode simple, cititorul va putea rezolva sistemul dat prin metoda lui Cramer (care necesită calculul a 6 determinanți de ordinul 5), prin metoda matriceală $AX = B$; $X = A^{-1} \cdot B$ (care necesită calculul unei matrici inverse de ordinul 5) sau prin metoda eliminării totale (Gauss—Jordan), care este mult mai laborioasă (necesită un volum de calcule de două ori mai mare față de metoda eliminării parțiale) și în plus necesită operații cu fracții.

Menționăm cu această ocazie un fapt care trebuie scos în evidență și anume că, tocmai aceste metode: Cramer, matriceală, Gauss—Jordan, sînt studiate și expuse în manualele școlare.

b. Discuția sistemelor liniare neomogene.

Pentru a cunoaște natura unui sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute, vom folosi teorema[1] Kronecker—Capelli.

Dacă notăm $p = \text{rang } A$, $q = \text{rang } (A\,|B)$, atunci sistemul

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

este compatibil, dacă și numai dacă $p = q$.

Această teoremă simplă a cărei demonstrație se poate face fără calcule cu determinanți are două avantaje:

— ne permite să știm dacă sistemul este compatibil;

— în caz afirmativ, pe aceeași schemă se poate determina soluția, sau soluțiile sistemului.

Putem avea următoarele situații:

$p = q = n$; sistemul este compatibil determinat (admite soluție unică);

$p = q < n$; sistemul este compatibil nedeterminat (admite ∞^{n-p} soluții).

Dacă $n - p = 1, 2, \ldots, r$, vom spune că avem o infinitate simplă, dublă, ..., multiplă de ordinul r de soluții.

$p < q$; sistemul este incompatibil (nu admite soluții).

---

[1] Teorema lui Rouché care se mai află încă în toate manualele de liceu este atît de laborioasă încît nu mai este folosită. Ocupă locul cuvenit în muzeul de istorie a matematicii.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple

1°. $(m = n)$ $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 5. \end{aligned}$

$$(A\,|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{-3} & -2 & 2 \\ -7 & -5 & 4 \end{array}\right) \to (\mathbf{1}\,|\,2).$$

Discuție. Cum $p = q = n = 3$, sistemul este compatibil determinat $(p = q = n;\ m = n)$.

Soluție. Începînd cu ultimul pas și terminînd cu primul, se deduce succesiv:

$$x_3 = 2 : 1 = 2;\ x_2 = (2 + 4) : (-3) = -2;\ x_1 = 1 - 6 + 8 = 3;$$

$$x_1 = 3;\ x_2 = -2;\ x_3 = 2.$$

2°. $(m > n)$ $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 &= 11 \\ x_1 - 2x_2 &= -1 \end{aligned}$

$$(A\,|B) = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 11 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{-5} & -10 \\ -5 & -10 \\ -4 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

Discuție. Se constată că $p = q = n = 2$, sistemul este deci compatibil determinat $(p = q = n;\ m > n)$.

Soluție. Se obține succesiv: $x_2 = (-10) : (-5) = 2;\ x_1 = 7 - 4 = 3$. Soluția găsită (3, 2), verifică evident și ultimile două ecuații.

3°. $(m = n)$ $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$

$$(A\,|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{-5} & 0 & -2 \\ -5 & 0 & -2 \end{array}\right) \to (0\,|\,0).$$

Discuție. $p = q = 2;\ n = 3$. Cum $p = q < n$, iar $n - p = 1$, sistemul este compatibil și admite o infinitate simplă de soluții $(\infty^{n-p} = \infty^1)$; $p = q < n,\ m = n$.

Soluție. Se consideră $x_3 = \alpha$ necunoscută secundară, apoi se obține succesiv: $x_2 = 2 : 5;\ x_1 = 4 - \alpha - 4 : 5 = (16 - 5\alpha) : 5;\ \alpha \in \mathbf{R}$

Scanned with OKEN Scanner

4°. $(m > n)$ $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 14 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 10. \end{aligned}$

$$(A\,|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 14 \\ 3 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

Discuție. $p = q = 2$; $n = 3$. Cum $p = q < n$, iar $n - p = 1$, sistemul este compatibil nedeterminat și admite o infinitate simplă de soluții $(\infty^{n-p} = \infty^1)$; $p = q < n$, $m > n$.

Soluție. Dacă se consideră $x_3 = \alpha$ necunoscută secundară, se obține: $x_2 = 2 : 5$; $x_1 = (16 - 5\alpha) : 5$; $\alpha \in \mathbf{R}$.

5°. $(m < n)$; $\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_8 &= -8. \end{aligned}$

$$(A\,|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & -5 & -5 \\ 5 & -5 & -5 & -5 \end{array}\right) \to (0\ 0\,|\,0).$$

Discuție. $p = q = 2$; $n = 4$. Cum $p = q < n$ și $n - p = 2$, sistemul este compatibil dublu nedeterminat: $(p = q < n;\ m < n)$.

Soluție. Dacă se consideră $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, necunoscute secundare, se obține $x_2 = -1 + \alpha + \beta$; $x_1 = -1 - 2\alpha + 4(-1 + \alpha + \beta)$, $x_1 = 2\alpha + 4\beta - 5$; $x_2 = \alpha + \beta - 1$; $x_3 = \alpha$; $x_4 = \beta$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

6°. $(m = n)$; $\begin{aligned} x_1 - x_2 - 3x_3 &= 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 19x_3 &= 10. \end{aligned}$

$$(A\,|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 19 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 10 & -20 \\ 5 & 25 & -6 \end{array}\right) \to (0\,|\,88).$$

Discuție. $p = 2$; $q = 3$; $p < q$; sistemul este incompatibil.

7°. $(m > n)$; $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 8 \\ 3x_1 - x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 10. \end{aligned}$

$$(A\,|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} -2 & -20 \\ 5 & -6 \end{array}\right) \to (0\,|\,88).$$

Discuție. $p = 2$; $q = 3$; $p < q$; sistemul este incompatibil.

Scanned with OKEN Scanner

3°. $(m < n)$;
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \to (0\ 0\,|\,6).$$

Discuție. $p = 2$; $q = 3$; $p < q$, sistemul este incompatibil.

Observație. Putem avea următoarele situații:

1°. *Sistemul este compatibil determinat* (două cazuri):

$$p = q = n, \text{ iar } m = n, \text{ sau } m > n.$$

2°. *Sistemul este compatibil nedeterminat* (3 cazuri):

$$p = q < n, \text{ iar } m = n,\ m > n, \text{ sau } m < n,$$

și poate avea o infinitate simplă, dublă, ..., multiplă de ordinul r de soluții (după cum $n - p = 1, 2, \ldots, r$).

3°. *Sistemul poate fi incompatibil* (3 cazuri):

$$p < q, \text{ iar } m = n,\ m > n, \text{ sau } m < n.$$

c. Discuția sistemelor liniare omogene.

Dacă sistemul liniar este omogen, atunci el este de forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Deoarece rang A = rang $(A\,|\,0)$, condiția $p = q$ este întotdeauna satisfăcută.

Dacă $p = n$, sistemul este compatibil determinat și admitem numai soluția banală $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Dacă $p < n$, sistemul este compatibil nedeterminat și admite o infinitate, simplă, dublă, ..., multiplă de ordinul r de soluții, nebanale (după cum $n - p = 1, 2, \ldots, r$).

Exemple. Să se discute și să se rezolve sistemele omogene:

1°.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

$$(A\,|\,O) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -5 & -5 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \to (42)$$

Discuție. $p = q = n = 4$. Sistemul este compatibil determinat și admite numai soluția banală $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

2°.
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 \qquad\quad &= 0,\\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= 0,\\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0. \end{aligned}$$

$$(A\,|\,0) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0\\ 2 & -3 & -1 & -5\\ 3 & -7 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5\\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to (0\ \ 0).$$

Discuție. $p = q = 2$, $n = 4$, $n - p = 2$. Sistemul este compatibil dublu nedeterminat (admite ∞^2 soluții).

Soluția. Dacă se consideră $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ necunoscute secundare, se obține: $x_2 = \alpha + \beta$; $x_1 = -2\alpha + 4(\alpha + \beta) = 2\alpha + 4\beta$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Concluzii. Folosind teorema Kronecker-Capelli, discuția sistemelor liniare necesită un volum redus de calcule ce rezultă din transformarea matricei complete $(A\,|B)$ în matrici triunghiulare. În urma acestei transformări se determină $p = \text{rang}\ A$ și $q = \text{rang}\ (A\,|B)$.

În cazul în care $p = q$, metoda eliminării parțiale ne permite să găsim și soluția (dacă $p = q = n$) sau soluțiile (dacă $p = q < n$) sistemului, folosind aceeași schemă de calcul, ceea ce constituie un alt mare avantaj al metodei.

§ 3. Valoarea numerică a unei funcții liniare

În programarea liniară se pune în mod curent problema de a determina valoarea unei funcții liniare de forma:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2}$$

unde $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \in \mathbf{R}$ sînt date, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt soluțiile sistemului de n ecuații liniare cu n necunoscute

$$a_{i1}x_1 + x_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i;\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

despre care știm că este unic determinat, *fără a rezolva sistemul* (fără a-i cunoaște soluțiile).

Metoda 1. Se scrie sistemul (3) la care se adaugă (2). Se obține sistemul:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1,\\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n &= b_n,\\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n &= f, \end{aligned} \tag{4}$$

format din $(n + 1)$ ecuații cu n necunoscute: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Folosind metoda eliminării parțiale paragraful **2**, se ajunge după n pași la o matrice superior triunghiulară de forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n\\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n & f \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)}\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha f + \beta \end{array}\right).$$

Deoarece sistemul dat (3) este unic determinat ($p = q = n$), va trebui ca $\alpha f + \beta = 0$, din care se deduce $f = -\beta : \alpha$.

Exemplu. Se cere valoarea funcției:

$$f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4, \tag{5}$$

în care x_1, x_2, x_3, x_4 sînt soluțiile sistemului:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 14, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 6, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned} \tag{6}$$

Soluție. Scriem matricea completă, formată din sistemul (6) la care se adaugă ecuația (5) și o transformăm (după 4 pași) într-o matrice superior triunghiulară:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 3 & 1 & 2 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & f \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{-5} & -1 & -6 & -25 \\ -5 & 0 & 1 & -8 \\ 1 & -3 & -1 & -9 \\ -3 & 2 & -3 & f-28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} \mathbf{-5} & -35 & -85 \\ 16 & 11 & 70 \\ -13 & -3 & -5f+65 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 7 & 17 \\ 16 & 11 & 70 \\ 13 & 3 & 5f-65 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{r|r} \mathbf{-101} & -202 \\ -88 & 5f-286 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{r|r} 1 & 2 \\ 88 & 286-5f \end{array}\right) \to (110-5f).$$

Sistemul (6) va fi unic determinat dacă $p = q = 4$ (are 4 pivoți nenuli: (1, -5, -5, -101), iar $110 - 5f = 0$; $f = 22$.

O b s e r v a ț i e. Metoda folosită ne permite să rezolvăm sistemul dat și să verificăm exactitatea rezultatului.

Se obține succesiv, începînd cu pasul 3:

$$x_4 = 2;\ x_3 = 17 - 7.2 = 3;\ x_2 = -9 + 2 + 9 = 2;\ x_1 = 14 - 4 - 3 - 6 = 1.$$

$$x_1 = 1;\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 2,\ f = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 = 22.$$

Metoda 2. Se consideră sistemul (4) scris sub forma:

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n + 0 &= b_1, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n + 0 &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n + 0 &= b_n, \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n - f &= 0, \end{aligned}$$

de $(n + 1)$ ecuații cu $(n + 1)$ necunoscute: $x_1, x_2, \ldots, x_n, f$.

Folosind metoda eliminării parțiale, după n pași se obține o matrice triunghiulară de forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & -1 & 0 \end{array}\right) \dots \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & 0 & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & 0 & b_n^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a^{(n)} & b^{(n)} \end{array}\right)$$

din care se deduce soluția $f = b^{(n)} : a^{(n)}$.

Exemplu. Să se determine α, astfel ca funcția

$$f = 3x_1 - 4x_2 + \alpha\, x_3, \tag{7}$$

să aibă valoarea $f = 27$, știind că x_1, x_2, x_3 sînt soluțiile sistemului

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 4, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 5. \end{aligned} \tag{8}$$

Soluție. Scriem matricea completă a sistemului format din (8) și (7), pe care o transformăm după 3 pași într-o matrice triunghiulară:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & \alpha & -f & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 0 & 2 \\ -7 & -5 & 0 & 4 \\ -16 & \alpha-9 & -f & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ -3\alpha-5 & 3f & 41 \end{array}\right) \to$$

$$\to (3f \mid 6\alpha + 51).$$

Din condițiile $3f = 6\alpha + 51$ și $f = 27$, se obține $\alpha = (3f - 51) : 6 = 5$.

Observație. Ca și prin metoda 1, soluția sistemului dat se obține ușor, putînd face verificarea rezultatului obținut.

Soluția este: $x_3 = 2$; $x_2 = (2 + 2.2) : (-3) = -2$; $x_1 = 1 - 3.2 - 4\,(-2) = 3$.

Cum $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$ și $\alpha = 5$, relația (7) devine:

$$f = 3.3 - 4.(-2) + 5.2 = 27 \quad \text{(c.c.t.v)}.$$

§ 4. Calculul matricei inverse

Fie $A = (a_{ij})_{nn}$ o matrice pătrată nesingulară (rangul matricei este egal cu n, rang $A = n$).

Se cunosc astăzi multe metode pentru a calcula matricea inversă A^{-1}. Vom expune două din cele mai simple.

a. Transformarea în matrice unitate.

Dacă notăm cu I matricea unitate de ordinul n, se obține succesiv:

$$(A \mid I) \to (A^{-1} \cdot A \mid A^{-1} \cdot I) \to (I \mid A^{-1}).$$

Se scrie matricea $(A \mid I)$. Folosind *regula dreptunghiului cu împărțirea la pivot*, după n pași, matricea A se transformă în matrice unitate, iar în locul matricei I apare matricea inversă A^{-1}.

Scanned with OKEN Scanner

Inițial se scrie matricea A și prima coloană din matricea unitate, apoi, în primul pas se adaugă coloana a doua din matricea unitate și se suprimă prima coloană obținută în matricea dată A. Se continuă în mod analog și în pasul 2, 3, ..., n.

Exemplu.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ \mathbf{3/2} & -5/2 & -3/2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|cc} 7/3 & 1 & -1/3 & 0 \\ -5/3 & -1 & 2/3 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -1/6 & 5/6 & -7/6 \\ -1/6 & -1/6 & 5/6 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 5 & -7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Verificare. Se constată ușor că:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 5 & -7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

b. Transformarea în matrice diagonală.

Se pornește tot de la matricea extinsă $(A\,|I)$. Folosind apoi regula dreptunghiului fără a împărți la pivot, după n pași matricea A se transformă în matricea diagonală D (cu elementele situate pe diagonala principală $d_{ii} \neq 0$ $(d_{ii} = a_{ii}^{(i-1)};\ i = 1, 2, \ldots, n)$, iar în locul matricei I apare o matrice $C = (c_{ij})$.

Situația se prezintă astfel:

$$(A\,|I) \to \ldots \to (D\,|C).$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right) \ldots \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & 0 & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{n-1} & c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{array}\right)$$

Dacă ținem seama de faptul că am aplicat regula dreptunghiului fără a împărți la pivot, matricea C devine egală cu matricea inversă A^{-1}, dacă vom împărți liniile 1, 2, ..., n respectiv la:

$$\begin{array}{c} a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \quad \ldots \quad a_{nn}^{(n-1)} \\ a_{22}^{(1)} \quad \ldots \quad a_{nn}^{(n-1)} \\ \ldots \ldots \ldots \\ a_{nn}^{(n-1)}. \end{array}$$

Exemplu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{2} & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{3} & -5 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|ccc} 14 & 6 & -2 & 0 \\ -5 & -3 & 2 & 0 \\ \mathbf{12} & 6 & -6 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -12 & 60 & -84 \\ -6 & -6 & 30 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix};\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 5/6 & -7/6 \\ -1/6 & -1/6 & 5/6 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 5 & -7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Elementele situate pe liniile 1, 2, 3 ale matricei C obținută în pasul 3 au fost împărțite respectiv la:

$$a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} = 2.3.12$$
$$a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} = 3.12$$
$$a_{33}^{(2)} = 12.$$

Observații. În [11] am arătat că numărul operațiilor elementare pentru a calcula inversa (A^{-1}) a unei matrici pătrate de ordinul n cu metoda (a) și cu metoda (b) este dat de relațiile:

$$N_a(n) = n^2(4n - 3)$$
$$N_b(n) = n(3n^2 - 4n + 1).$$

Metoda (b) prezintă două mari avantaje:

— Așa cum rezultă din tabela de mai jos unde am calculat diferențele $\Delta(n) = N_a(n) - N_b(n) = n^2(4n - 3) - n(3n^2 - 4n + 1) = n(n - 1)(n + 2)$, metoda ($b$) este mai puțin laborioasă față de metoda (a).

n	2	3	4	5	...	10	...	20	...	100
Δn	8	30	72	140	...	1 080	...	8 360	...	1 009 800

— Regula dreptunghiului se aplică fără a împărți la pivot, și deci calculul matricei C nu necesită operații cu fracții.

[1]. Altă
comu
[2]. Char
gramm
[3]. Dant
York,
[4]. Gass
[5]. Lupe
Bucur
[6]. Mali
[7]. Mihă
Bucur
[8]. Miho
ţifică,
[9]. Miho
Bucur
[10]. Mihu
Editur
[11]. Mihu,
[12]. Mihu,
[13]. Mihu,
1970.
[14]. Mires
[15]. Onice
[16]. Onice
miei R
[17]. Roşu,
[18]. Tome
două n
[19]. Tome
Sc. Pa
[20]. Vodă,
reşti —

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

[1]. Altăr, M; Rădulescu D. *Un algoritm pentru soluționarea problemelor de transport*; comunicare ținută la sesiunea științifică D.C.S. 1961.

[2]. Charnes, A; Cooper, W. W. *Management and industrial application of liniar programming*, 2 vol. New-York, 1961.

[3]. Dantzig, B. G. *Application of the simplex method to a transportation problem*, New-York, 1951.

[4]. Gass, S. I. *Linear programming: methods and application*, New-York, 1958.

[5]. Lupescu, T., Roșu, Al., Mihu, C. *Programarea matematică*, Editura militară, București, 1965.

[6]. Maliță, M., Zidăroiu, C. *Matematica organizării*. Editura tehnică, București, 1971.

[7]. Mihăilă, N. *Introducere în programarea liniară*. Editura didactică și pedagogică, București, 1969.

[8]. Mihoc, Gh., Ionescu, H. *Bazele matematice ale programării liniare*. Editura științifică, București, 1965.

[9]. Mihoc, Gh., Nădejde, I. *Programarea matematică*, vol. 1—2. Editura științifică, București, 1966.

[10]. Mihu, C., Nădejde, I., Altăr, M. *Aplicații ale programării liniare în economie*. Editura științifică, București, 1965.

[11]. Mihu, C. *Metode numerice în algebra liniară*. Editura tehnică 1977.

[12]. Mihu, C. *O metodă de analiză a prețului de cost*. Revista de statistică, nr. 6, 1959.

[13]. Mihu, C. *Probleme de optimizare cu aplicații practice*, Editura militară, București, 1970.

[14]. Mirescu, P., Roșu, Al. *Teoria grafelor*, Editura militară, București, 1968.

[15]. Onicescu, O. *Despre programarea liniară*. G.M.F., seria A. nr. 8, 1960.

[16]. Onicescu, O. *Strategia jocurilor cu aplicații la programarea liniară*. Editura Academiei R.S.R., București, 1971.

[17]. Roșu, Al. *Programarea liniară în învățământul mediu*, G.M.F., seria A, nr. 2, 1963.

[18]. Tomescu, I. *Metodă pentru determinarea drumului de cea mai mică lungime dintre două noduri ale unui graf finit*. Analele Univ. București, nr. 2, 1966.

[19]. Tomescu, I. *Sur les méthodes matricielles dans la théorie des réseaux*. C. R. Acad. Sc. Paris t. 263, 1966.

[20]. Vodă, V. Gh., Triunghiul — *Ringul cu trei colțuri*. Editura Albatros — București — 1979.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

INTRODUCERE 3

Capitolul I

Mărimi medii 5
§ 1. Calculul mărimilor medii 5
§ 2. Criteriu pentru aplicarea în practică a mărimilor medii (teoria Chissini—Boiarschi) 19
§ 3. Relații între mărimile medii 24
§ 4. Interpretarea geometrică a mărimilor medii 26
§ 5. Teoreme de maxim și minim, demonstrate cu ajutorul unor relații între mărimile medii 27

Capitolul II

Probleme de maxim și minim (tratate elementar). 36
§ 1. Probleme de maxim 36
Probleme propuse 42
§ 2. Probleme de minim 45
Probleme propuse 50

Capitolul III

Calculul variației procentuale a unei sume, produs sau cît de două sau mai multe mărimi variabile 53
§ 1. Variația procentuală a unei sume de două sau mai multe mărimi variabile 53
§ 2. Variația procentuală a unui produs de două mărimi variabile 54
§ 3. Variația procentuală a unui produs de n mărimi variabile 55
§ 4. Variația procentuală a unui cît de două mărimi variabile 56
§ 5. Variația procentuală a unui cît de produse a mai multor mărimi variabile . . 57

Capitolul IV

Reprezentări grafice 61
Probleme propuse 75

Capitolul V

Probleme de maxim și minim 77
Probleme propuse 87

Capitolul VI

Aplicații ale calculului integral 92
§ 1. Calculul ariilor suprafețelor plane 92
§ 2. Volumul corpurilor de rotație 94
Volumul butoaielor 99
1. Vase cu formă parabolică 99
2. Vase cu formă elipsoidală 100

Scanned with OKEN Scanner

3. Vase cu formă circulară 100
§ 1. Lungimea graficului unei funcţii 103
§ 2. Calculul ariilor suprafeţelor de rotaţie 104
§ 3. Determinarea centrelor de greutate 107
Probleme propuse 111
Prima teoremă a lui Guldin (exemple) 112
A doua teoremă a lui Guldin (exemple) 114

Capitolul VII

Aplicaţii diverse 117
§ 1. O problemă de croială 117
§ 2. Aplicaţii ale analizei combinatorii 119
§ 3. Aplicaţii în topografie 123
§ 4. Metode practice de împărţire a unui unghi în trei părţi egale („trisecţia unghiului") 127
§ 5. Volumul unor corpuri 129
§ 6. Probleme de interpolare 131

Capitolul VIII

Aplicaţii ale nomografiei 138

Capitolul IX

Programare liniară 157
Introducere 157
§ 1. Modelul matematic al unui program liniar 159
§ 2. Rezolvarea programelor liniare prin „metoda descrierii totale" 161
§ 3. Interpretarea geometrică a programelor liniare 163
§ 4. Algoritmul simplex 182
Probleme propuse 209

Capitolul X

Problema transporturilor 211
§ 1. Enunţul problemei 211
§ 2. Modelul matematic 211
§ 3. Clasificarea soluţiilor 213
§ 4. Determinarea unei soluţii iniţiale 215
§ 5. Metoda distributivă modificată (A. Charnes şi W. Cooper) 218
§ 6. Probleme de transport neechilibrate 226
Probleme propuse 231

Capitolul XI

Grafe 236
§ 1. Concepte legate de orientare 236
§ 2. Concepte legate de neorientare 237
§ 3. Tipuri de grafe 238
§ 4. Drumul cel mai scurt într-un graf 241
§ 5. Drumul de valoare minimă într-un graf 242
§ 6. Drumul de valoare maximă într-un graf 247
§ 7. Relaţie de ordine strictă într-un graf 250
§ 8. Descompunerea unui graf conex fără circuite în nivele 251
§ 9. Determinarea drumului de valoare optimă între vîrfurile nivelului iniţial şi final ale unui graf 252
Probleme propuse 253
Anexă 256
BIBLIOGRAFIE 269

Scanned with OKEN Scanner

Coli de tipar: 17
Format: 16/70×100
Bun de tipar: 25-XI-1982
Ediția: 1982. Nr. de plan: 7195

Întreprinderea Poligrafică Cluj
B-dul Lenin Nr. 146
Municipiul Cluj-Napoca
Republica Socialistă România
Comanda Nr. 273

Scanned with OKEN Scanner

Lei 22,50

Scanned with OKEN Scanner